三角函數的應用 0914 班級　　　　姓名　　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　) 1.三角形的三邊長比為 3:5:7，則其最大內角為 (A)60° (B)90° (C)120° (D)135° (E)150°

【課本練習題-自我評量.】

解答 C

解析 利用餘弦定理

$$\cos\theta=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=\frac{-15}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2}$$

故最大角為 120°

(　　) 2.設 θ 為實數，若 $\sin2\theta=\frac{1}{3}$，則$(\sin\theta-\cos\theta)^2=$ (A)$\frac{2}{3}$ (B)1 (C)$\frac{4}{3}$ (D)$\frac{5}{3}$

【094 年歷屆試題.】

解答 A

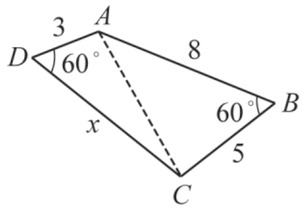
解析 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-\sin2\theta=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

(　　) 3.已知四邊形 $ABCD$（按順序）中，$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AD}=3$，且 $\angle ABC=\angle ADC=60°$，則$\overline{CD}$之長為多少？ (A)5 (B)6 (C)7 (D)8

【098 年歷屆試題.】

解答 D

解析



設$\overline{CD}=x$

在△ABC 中，$\overline{AC}^2=8^2+5^2-2\times8\times5\times\cos60°=49\cdots$①

在△ADC 中，$\overline{AC}^2=3^2+x^2-2\times3\times x\times\cos60°=x^2-3x+9\cdots$②

由①和②知

$x^2-3x+9=49\ \Rightarrow\ x^2-3x-40=0\ \Rightarrow\ (x-8)(x+5)=0\ \Rightarrow\ x=8$ 或 -5（不合）

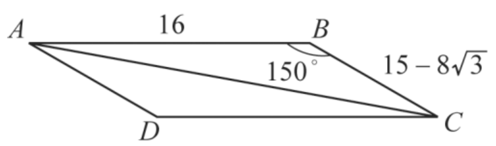
故$\overline{CD}=8$

(　　) 4.有一隻螞蟻在平行四邊形 $ABCD$ 的平面上從 A 點出發，行走至 C 點覓食，若 $\angle ABC=150°$，$\overline{AB}=16$，$\overline{BC}=15-8\sqrt{3}$，則螞蟻由 A 點行走至 C 點之最短距離為何？ (A)16 (B)17 (C)18 (D)19

【097 年歷屆試題.】

解答 B

解析



在△ABC 中，由餘弦定理知：

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos B$

$=16^2+(15-8\sqrt{3})^2-2\times16\times(15-8\sqrt{3})\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$=16^2+(15-8\sqrt{3})^2+16\sqrt{3}(15-8\sqrt{3})=16^2+(15-8\sqrt{3})[(15-8\sqrt{3})+16\sqrt{3}]$

$=16^2+(15-8\sqrt{3})(15+8\sqrt{3})=16^2+[15^2-(8\sqrt{3})^2]$

$=256+225-192=289$

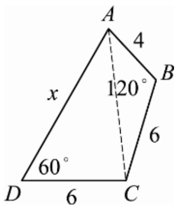
$\therefore\ \overline{AC}=\sqrt{289}=17$

(　　　) 5.四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CD}=6$，$\angle B=120°$，$\angle D=60°$，則 $\overline{AD}=$　(A) 7　(B) 8　(C) 9　(D) 10

【隨堂講義補充題.】

解答　D

解析



$\triangle ABC$ 中

$\overline{AC}^2=4^2+6^2-2\times4\times6\times\cos120°=76$

$\triangle ACD$ 中

$\overline{AC}^2=x^2+6^2-2\times x\times6\times\cos60°$

$\Rightarrow\ 76=x^2+36-6x$

$\Rightarrow\ x^2-6x-40=0\quad\Rightarrow\quad x=10$ 或 -4（不合）

$\therefore\ \overline{AD}=10$

(　　　) 6.在△ABC 中，設 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 之對應邊長分別為 a、b、c，若 $\angle B=120°$，$a=5$，$c=3$，則△ABC 的外接圓面積為何？　(A) $\frac{7}{\sqrt{3}}\pi$　(B) $\frac{49}{\sqrt{3}}\pi$　(C) $\frac{7}{3}\pi$　(D) $\frac{49}{3}\pi$

【095 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos120°=9+25-(-15)=49$

$\Rightarrow\ b=\sqrt{49}=7$

又 $\frac{b}{\sin B}=2R\quad\Rightarrow\quad\frac{7}{\sin120°}=2R\quad\Rightarrow\quad\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R\quad\Rightarrow\quad R=\frac{7}{\sqrt{3}}$

$\therefore$　△ABC 的外接圓面積為 $\pi R^2=\pi\times(\frac{7}{\sqrt{3}})^2=\frac{49}{3}\pi$

(　　　) 7.設 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$，且 $270°<\alpha<360°$，$180°<\beta<270°$，則 $\sin(\alpha+\beta)$的值為　(A) $\frac{2\sqrt{10}}{10}$　(B) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$　(C) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$　(D) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　$270°<\alpha<360°$，$180°<\beta<270°$

$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\beta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

故 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=(-\frac{3}{5})(-\frac{3}{\sqrt{10}})+\frac{4}{5}(-\frac{1}{\sqrt{10}})=\frac{\sqrt{10}}{10}$

(　　　) 8.△ABC 中，$\sin A=\frac{5}{13}$，$\cos B=-\frac{4}{5}$，則 $a:b:c=$　(A)25:32:15　(B)16:32:25　(C)25:16:39　(D)25:39:16

【龍騰自命題.】

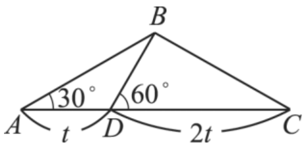
解答　D

(　　　) 9.在△ABC 中，若 D 點在線段 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{AD}$：$\overline{DC}=1$：2，又$\angle BAD=30°$，$\angle BDC=60°$，則$\angle DCB$ 的角度為何？　(A)30°　(B)45°　(C)60°　(D)75°

【099 年歷屆試題.】

解答 A

解析



令 $\overline{AD}=t$ 、 $\overline{DC}=2t$ ，其中 $t>0$

$\because$ $\angle BDC=60°$ $\Rightarrow$ $\angle BDA=120°$ $\Rightarrow$ $\angle ABD=30°$

$\therefore$ $\triangle DAB$ 為等腰三角形 $\Rightarrow$ $\overline{DB}=t$

由餘弦定理知，在$\triangle BCD$ 中，

$\overline{BC}^2=\overline{DB}^2+\overline{DC}^2-2\overline{DB}\times\overline{DC}\times\cos(\angle BDC)$

$=t^2+(2t)^2-2\times t\times 2t\times\cos60°=3t^2$ $\Rightarrow$ $\overline{BC}=\sqrt{3}t$

由正弦定理，在$\triangle BCD$ 中

$\dfrac{\sqrt{3}t}{\sin 60°}=\dfrac{t}{\sin C}$ $\Rightarrow$ $\sin C=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\angle C=30°$或 $150°$（不合）

故$\angle DCB=30°$

故選(A)

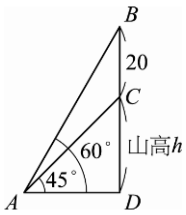
(　　　) 10.山上有一塔，塔高為 20 公尺，某人在地面上一點，分別測得山頂、塔頂的仰角為 $45°$ 、 $60°$ ，求山高為幾公尺？ (A) $20\left(\sqrt{3}-1\right)$

(B) $20\left(\sqrt{3}+1\right)$ (C) $10\left(\sqrt{3}-1\right)$ (D) $10\left(\sqrt{3}+1\right)$

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析



$\triangle ACD$ 中

$\overline{AD}=\overline{CD}=h$

$\triangle ABD$ 中

$\overline{BD}:\overline{AD}=\sqrt{3}:1$

$\Rightarrow$ $(20+h):h=\sqrt{3}:1$

$\Rightarrow$ $\sqrt{3}h=20+h$

$\Rightarrow$ $h=\dfrac{20}{\sqrt{3}-1}=10\left(\sqrt{3}+1\right)$（公尺）

(　　　) 11.從高 200 公尺的建築物 A 的屋頂測量另一建築物 B 之地基的俯角是 $30°$，而其屋頂的仰角是 $45°$，請問建築物 B 的高度為幾公尺？

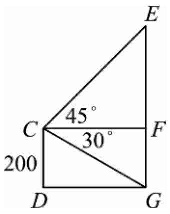
(A) $200\left(\sqrt{3}+1\right)$ (B) $200\left(\sqrt{3}-1\right)$ (C) $100\left(\sqrt{3}+1\right)$ (D) $100\left(\sqrt{3}-1\right)$

【隨堂講義補充題.】(　　　) 12. $\cos(\frac{\pi}{3}-\theta)\cos(\frac{\pi}{6}+\theta)-\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)\sin(\frac{\pi}{6}+\theta)=$ (A)1 (B)0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【龍騰自命題.】

解答 B 解答 A

解析



如圖，$\overline{FG}=\overline{CD}=200$

$\triangle CFG$ 中，$\overline{CF}=\sqrt{3}\ \overline{FG}=200\sqrt{3}$

$\triangle CEF$ 中，$\overline{EF}=\overline{CF}=200\sqrt{3}$

所求 $=\overline{FG}+\overline{EF}=200+200\sqrt{3}=200\left(\sqrt{3}+1\right)$（公尺）

解析 $\cos(\frac{\pi}{3}-\theta)\cos(\frac{\pi}{6}+\theta)-\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)\sin(\frac{\pi}{6}+\theta)$

$=\cos[(\frac{\pi}{3}-\theta)+(\frac{\pi}{6}+\theta)]=\cos\frac{\pi}{2}=0$

(　　) 13.地面上有二點 B、C 被一水池隔開，小聖在地面上找一點 A，量得 $\overline{AB}=80$ 公尺，$\overline{AC}=50$ 公尺，並測得 $\angle CAB=60°$，求 $\overline{BC}$ 長為 (A)50 公尺　(B)60 公尺　(C)70 公尺　(D)80 公尺

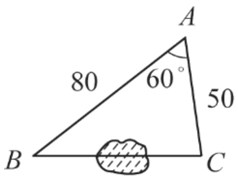
【龍騰自命題.】

解答 C

解析 由餘弦定理：

$\overline{BC}^2=80^2+50^2-2\times 80\times 50\times\cos 60°=6400+2500-4000=4900$

$\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{4900}=70$（公尺）



(　　) 14.$f(x)=2\sin x+3\cos x+4$ 的最大值等於　(A)$4+\sqrt{5}$　(B)7　(C)$4+\sqrt{13}$　(D)9

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $f(x)=2\sin x+3\cos x+4=\sqrt{13}(\frac{2}{\sqrt{13}}\sin x+\frac{3}{\sqrt{13}}\cos x)+4=\sqrt{13}\sin(x+\phi)+4$

$\because\ -1\le\sin(x+\phi)\le 1\quad\therefore\ 4-\sqrt{13}\le\sqrt{13}\sin(x+\phi)+4\le 4+\sqrt{13}$

(　　) 15.求 $f(x)=\cos^2 2x+2\sin^2 x$ 之極小值為　(A)$\frac{1}{4}$　(B)$\frac{1}{2}$　(C)$\frac{3}{4}$　(D)1

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $f(x)=\cos^2 2x+2\sin^2 x=\cos^2 2x+2\times\frac{1-\cos 2x}{2}$

$=\cos^2 2x-\cos 2x+1=(\cos 2x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

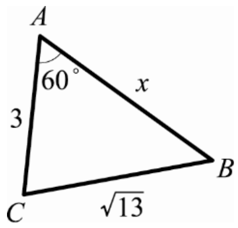
$\therefore\ \cos 2x=\frac{1}{2}$ 時，$f(x)=\frac{3}{4}$ 為極小值

(　　) 16.$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{BC}=\sqrt{13}$，$\overline{AC}=3$，$\angle A=60°$，則 $\cos C$ 之值為何？　(A)$-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$　(B)$-\frac{1}{\sqrt{13}}$　(C)$\frac{1}{\sqrt{13}}$　(D)$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

【101 年歷屆試題.】

解答 C

解析 設 $\overline{AB}=x$，



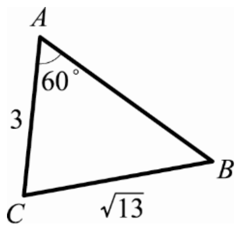
由餘弦定理知：

$(\sqrt{13})^2=3^2+x^2-2\times3\times x\times\cos60^\circ \quad\Rightarrow\quad 13=9+x^2-3x$

$\Rightarrow\quad x^2-3x-4=0 \quad\Rightarrow\quad (x-4)(x+1)=0 \quad\Rightarrow\quad x=4$ 或 -1（不合）

$$\cos C=\frac{(\sqrt{13})^2+3^2-4^2}{2\times\sqrt{13}\times3}=\frac{1}{\sqrt{13}}$$

另解：



$\because\quad \overline{BC}>\overline{AC}\qquad\therefore\quad \angle A>\angle B$（大邊對大角）

$\Rightarrow\quad 0^\circ<\angle B<60^\circ \quad\Rightarrow\quad \angle B$ 為銳角

由正弦定理知 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin B} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\sqrt{13}}{\sin60^\circ}=\dfrac{3}{\sin B} \quad\Rightarrow\quad \sin B=\dfrac{3\sqrt3}{2\sqrt{13}}$

則 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-(\dfrac{3\sqrt3}{2\sqrt{13}})^2}=\dfrac{5}{2\sqrt{13}}$

$\cos C=\cos[180^\circ-(A+B)]=-\cos(A+B)=-(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$

$\quad=-(\cos60^\circ\cos B-\sin60^\circ\sin B)=-(\dfrac12\times\dfrac{5}{2\sqrt{13}}-\dfrac{\sqrt3}{2}\times\dfrac{3\sqrt3}{2\sqrt{13}})=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$

(　　　) 17.若 θ 為第二象限角且 $\sin\theta=\dfrac45$，則 $\sin2\theta$ 的值為　(A) $\dfrac{24}{25}$　(B) $-\dfrac{24}{25}$　(C) $-\dfrac45$　(D) $\dfrac85$

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　$\sin\theta=\dfrac45 \quad\Rightarrow\quad \cos\theta=-\sqrt{1-(\dfrac45)^2}=-\dfrac35$（$\because\ \theta$ 為第二象限角）

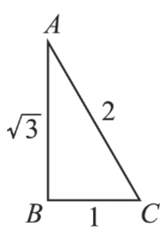
$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\dfrac45\times(-\dfrac35)=-\dfrac{24}{25}$

(　　　) 18.在△ABC 中，$\overline{BC}=1$，$\overline{CA}=2$，$\overline{AB}=\sqrt3$，則 $\angle A=$　(A)15°　(B)30°　(C)45°　(D)60°

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　$\cos A=\dfrac{2^2+(\sqrt3)^2-1^2}{2\times2\times\sqrt3}=\dfrac{\sqrt3}{2}\qquad\therefore\quad \angle A=30^\circ$



(　　　) 19.求 $\cos15^\circ=$　(A) $\dfrac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$　(B) $\dfrac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$　(C) $\dfrac{\sqrt3}{4}$　(D) $\dfrac14$

【隨堂測驗.】

解答　A

解析 $\cos 15° = \cos(60° - 45°)$

$$= \cos 60° \cos 45° + \sin 60° \sin 45°$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(　　) 20.△ ABC 中，$\angle A = 120°$，$\overline{AB} = 3$，$\overline{AC} = 5$，求 $\overline{BC} =$ (A)5 (B)6 (C)7 (D)8

【隨堂測驗.】

解答 C

解析 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$= 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 120°$$

$$= 25 + 9 + 15 = 49$$

$\therefore$ $\overline{BC} = a = 7$

(　　) 21.三角形邊長為 13、14、15，此三角形的外接圓半徑為 (A)$\frac{65}{4}$ (B)$\frac{65}{6}$ (C)$\frac{65}{8}$ (D)$\frac{13}{5}$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $\triangle = \frac{abc}{4R}$ $\Rightarrow$ $R = \frac{abc}{4\triangle} = \frac{13 \times 14 \times 15}{4 \times 84} = \frac{65}{8}$

(　　) 22.△ABC 中，若 $b^2 - (c-a)^2 = 3ca$，則 $\angle B =$ (A)30° (B)60° (C)120° (D)150°

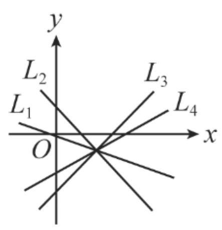
【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $b^2 - (c-a)^2 = 3ca$ $\Rightarrow$ $b^2 - c^2 + 2ca - a^2 = 3ca$ $\Rightarrow$ $-ca = c^2 + a^2 - b^2$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{-ca}{2ca} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \angle B = 120°$$

(　　) 23.如下圖，設直線 L_1、L_2、L_3、L_4 的斜角分別為 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4，則它們的大小順序為



(A)$\theta_1 > \theta_2 > \theta_3 > \theta_4$ (B)$\theta_4 > \theta_3 > \theta_2 > \theta_1$ (C)$\theta_2 > \theta_1 > \theta_4 > \theta_3$ (D)$\theta_3 > \theta_4 > \theta_1 > \theta_2$

【龍騰自命題.】

解答 A

(　　) 24.下列哪一組數據可為鈍角三角形的三邊長？ (A)1、2、3 (B)2、3、4 (C)3、4、5 (D)4、5、6

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 (A)不能構成三角形之三邊

(B)$2^2 + 3^2 < 4^2$ $\therefore$ 為鈍角△

(C)3、4、5 為直角△之三邊

(D)$4^2 + 5^2 > 6^2$ $\therefore$ 為銳角△

(　　) 25.直線 $L: 3x - \sqrt{3}y + 1 = 0$ 與 x 軸的交角為 (A)30°、150° (B)60°、120° (C)45°、135° (D)90° (E)0°

【課本練習題-自我評量.】

解答 B

解析 直線 L 與 x 軸的一個交角即為 L 的斜角

$\Rightarrow$ 直線的斜率 $m = -\frac{3}{-\sqrt{3}} = \sqrt{3} = \tan\theta$

$\therefore$ 直線 L 的斜角為 60°，故直線 L 與 x 軸的交角為 60° 或 120°