0309　全冊　姓名　　　　座號

一、單選題 (25 題　每題 4 分　共 100 分)

(　　)1.設 $x>0$，$y>0$，$x+y=6$，則 xy^2 之最大值為何？　(A)16　(B)18　(C)25　(D)32

【103 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$x+y=6 \Rightarrow x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{y}{2}=6$

由算幾不等式：

$$\frac{x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}}{3}\ge\sqrt[3]{x\times\frac{y}{2}\times\frac{y}{2}} \Rightarrow \frac{x+y}{3}\ge\sqrt[3]{\frac{1}{4}xy^2}$$

把 $x+y=6$ 代入上式，

則 $\dfrac{6}{3}\ge\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}xy^2} \Rightarrow 2\ge\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}xy^2} \Rightarrow 2^3\ge\dfrac{1}{4}xy^2 \Rightarrow xy^2\le 32$

故 xy^2 之最大值為 32

(　　)2.已知平面上三點 $A(1,3)$、$B(3,k)$、$C(5,1)$，若向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 垂直，則 $k=$　(A)1　(B)3　(C)5　(D)7

【091 年歷屆試題.】

解答　D

解析　由題目中，三點 $A(1,3)$、$B(3,k)$、$C(5,1)$且 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

先求 $\overrightarrow{AB}=(3-1,k-3)=(2,k-3)$

$\overrightarrow{AC}=(5-1,1-3)=(4,-2)$

$\because\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow (2,k-3)\cdot(4,-2)=0$

$\Rightarrow 2\times4+(k-3)\times(-2)=0 \Rightarrow 8-2k+6=0 \Rightarrow k=7$

(　　)3.設 $\dfrac{5x^2+2x-4}{(x-1)(x^2+x-1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x-1}$，則 $A+B+C=$　(A)3　(B)4　(C)5　(D)6

【098 年歷屆試題.】

解答　D

解析　原式兩側乘以$(x-1)(x^2+x-1)$

$\Rightarrow 5x^2+2x-4=A(x^2+x-1)+(Bx+C)(x-1)$

$=(A+B)x^2+(A-B+C)x+(-A-C)$

$$\Rightarrow \begin{cases}A+B=5 & \cdots① \\ A-B+C=2 & \cdots② \\ -A-C=-4 & \cdots③\end{cases}$$

由① + ②　$2A+C=7\cdots④$

由③ + ④　$A=3$，代回① $\Rightarrow B=2$，代回③ $\Rightarrow C=1$

故 $A+B+C=3+2+1=6$

(　　)4.設 p、q 為二相異正整數，且 a_n 為一等差數列的第 n 項。若 $a_p=q$，$a_q=p$，則 $a_{p+q}=$　(A)0　(B)p　(C)q　(D)$p+q$

【098 年歷屆試題.】

解答　A

解析　a_n 為等差數列的第 n 項

設首項 a_1，公差 d

$\because\ a_p=q\quad\therefore\ a_1+(p-1)d=q\cdots①$

$\because\ a_q=p\quad\therefore\ a_1+(q-1)d=p\cdots②$

由① − ②

$(p-q)d=q-p \Rightarrow d=\dfrac{q-p}{p-q}=-1$

$d=-1$ 代回①

$a_1+(p-1)(-1)=q \Rightarrow a_1=p+q-1$

因此

$a_{p+q}=a_1+(p+q-1)d=(p+q-1)+(p+q-1)\times(-1)=0$

(　　)5.圓$(x-1)^2+(y+3)^2=16$ 與直線 $3x+4y-11=0$ 的交點有多少個？　(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

【093 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$(x-1)^2+(y+3)^2=16$，圓心為$(1,-3)$、半徑 $r=\sqrt{16}=4$

又圓心$(1,-3)$與 $3x+4y-11=0$ 的距離

$$d=\frac{|3\times1+4\times(-3)-11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$$

$\because\ d=r \Rightarrow$ 圓與直線相切

$\therefore$ 圓$(x-1)^2+(y+3)^2=16$ 與直線 $3x+4y-11=0$ 只有 1 個交點

(　　)6.求橢圓 $9x^2+5y^2+18x-20y-16=0$ 的長軸長為何？　(A)4　(B)5　(C)6　(D)9

【093 年歷屆試題.】

解答　C

解析　$9x^2+5y^2+18x-20y-16=0 \Rightarrow 9(x^2+2x)+5(y^2-4y)=16$

$\Rightarrow 9(x^2+2x+1)+5(y^2-4y+4)=16+9+20$

$\Rightarrow 9(x+1)^2+5(y-2)^2=45 \Rightarrow \dfrac{(x+1)^2}{5}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$

$\Rightarrow \dfrac{(y-2)^2}{3^2}+\dfrac{(x+1)^2}{(\sqrt{5})^2}=1$

即 $a=3$，$b=\sqrt{5}$

$\therefore$ 長軸長 $2a=6$

(　　)7.設 $f'(x)$為函數 $f(x)$的導函數，若 $f'(x)=2x^2$，則 $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{f(2+\theta)-f(2)}{2\theta}=$？　(A)2　(B)$2^2$　(C)2^3　(D)2^4

【097 年歷屆試題.】

解答　B

解析

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{f(2+\theta)-f(2)}{2\theta}=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to 0}\frac{f(2+\theta)-f(2)}{\theta}=\frac{1}{2}f'(2)=\frac{1}{2}\times(2\times 2^2)=2^2$$

(　　) 8.已知 $i=\sqrt{-1}$ ，則複數 $(3-2i)(4+5i)$ 的實部為何？ (A)2 (B)7 (C)9 (D)22

【093 年歷屆試題.】

解答 D

解析 $(3-2i)(4+5i)=[3\times 4-(-2)\times 5]+[3\times 5+(-2)\times 4]i=22+7i$

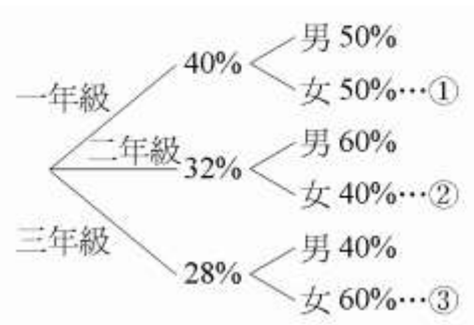
$\therefore$ $(3-2i)(4+5i)$ 的實部為 22

(　　) 9.中山高中一、二、三年級學生人數的比例分別為 40%、32%、28%，而一、二、三年級男生人數占該年級的比例分別為 50%、60%、40%，現從全校學生中任意選取 1 人，則此人為女生的機率為何？ (A)43.2% (B)45.4% (C)47.8% (D)49.6%

【099 年歷屆試題.】

解答 D

解析 由題意，樹狀圖如下：



由①、②、③知所求機率

$=40\%\times 50\%+32\%\times 40\%+28\%\times 60\%=49.6\%$

故選(D)

(　　) 10.下列何者為曲線 $4y^2=(2x+1)^2+9$ 的漸近線？

(A) $y=x+\frac{1}{2}$ (B) $y=2x-1$ (C) $y=2x+1$ (D) $2y=x+\frac{1}{2}$

【095 年歷屆試題.】

解答 A

解析 $4y^2=(2x+1)^2+9 \Rightarrow 4y^2-(2x+1)^2=9$

漸近線為 $4y^2-(2x+1)^2=0$

即 $(2y)^2-(2x+1)^2=0 \Rightarrow (2y-2x-1)(2y+2x+1)=0$

$\Rightarrow y=x+\frac{1}{2}$ 或 $y=-x-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 漸近線為 $y=x+\frac{1}{2}$ 與 $y=-x-\frac{1}{2}$

(　　) 11.若圓 C 的方程式為 $x^2+y^2-6x-4y+4=0$，則下列各方程式的圖形，何者與圓 C 相切？ (A) $3x+4y-1=0$ (B) $3x+4y-2=0$ (C) $3x+4y-7=0$ (D) $3x+4y-14=0$

【098 年歷屆試題】

解答 B

解析 圓 C ： $x^2+y^2-6x-4y+4=0$

圓心 $O(-\frac{-6}{2},-\frac{-4}{2})=(3,2)$ ，半徑

$r=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(-4)^2-4\times 4}=3$

(A) $d=\frac{|3\times 3+4\times 2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}>r$

(B) $d=\frac{|3\times 3+4\times 2-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=r$

(C) $d=\frac{|3\times 3+4\times 2-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}<r$

(D) $d=\frac{|3\times 3+4\times 2-14|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5}<r$

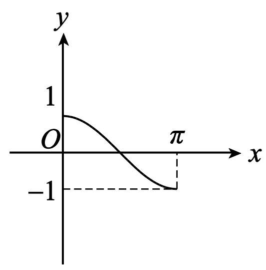
故(B) $3x+4y-2=0$ 與圓 C 相切

(　　) 12.已知 $0\le\alpha$ 、 $\beta\le\pi$ 。下列各選項中，何者恆為正確？ (A)若 $\cos\alpha=\cos\beta$ ，則 $\alpha=\beta$ (B)若 $\cos(\alpha-\beta)=0$，則 $\alpha=\beta$ (C)若 $\sin\alpha=\sin\beta$ ，則 $\alpha=\beta$ (D)若 $\sin(\alpha-\beta)=0$，則 $\alpha=\beta$

【100 年歷屆試題.】

解答 A

解析 (A)當 $0\le x\le\pi$ 時，$y=\cos x$ 的圖形如下



為 1 對 1 函數，即 $\cos\alpha=\cos\beta \Rightarrow \alpha=\beta$

(B)反例： $\cos(\frac{5}{6}\pi-\frac{2}{6}\pi)=\cos\frac{1}{2}\pi=0$ ，但 $\frac{5}{6}\pi\neq\frac{2}{6}\pi$

(C)反例： $\sin\frac{\pi}{3}=\sin\frac{2}{3}\pi$ ，但 $\frac{\pi}{3}\neq\frac{2}{3}\pi$

(D)反例：$\sin(\pi-0)=\sin\pi=0$，但 $\pi\neq 0$

(　　) 13.設 $A(0,6)$、$B(-12,-24)$、$C(24,12)$ 為坐標平面上之三點，試問△ABC 之重心坐標為何？ (A)(2,2) (B)(4,−2) (C) $(9,-\frac{3}{2})$ (D)(18,−6)

【095 年歷屆試題.】

解答 B

解析 $\because$ $A(0,6)$、$B(-12,-24)$、$C(24,12)$

$\therefore$ △ABC 之重心坐標為

$(\frac{0+(-12)+24}{3},\frac{6+(-24)+12}{3})=(4,-2)$

(　　) 14.設 a、b、c 均為實數且 L：$ax-by+c=0$ 為坐標平面上之一直線，若 L 的斜角為 $\frac{\pi}{6}$ ，則 $a:b=$ (A) $1:\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}:1$ (C) $1:\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{3}:1$

【096 年歷屆試題.】

解答 C

解析 L：$ax-by+c=0$，斜率 $m=-\frac{a}{-b}=\frac{a}{b}$

又斜角為 $\frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow$ $m=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

即 $\frac{a}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore$ $a:b=1:\sqrt{3}$

( ) 15.判斷下列各數值中，何者小於 0？

（參考公式：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ）

(A)$\cos100°-\sin2011°$ (B)$\cos^2 100°-\sin^2 100°$

(C)$\cos^2 2011°-\sin^2 2011°$ (D)$\cos100°\cos2011°-\sin100°\sin2011°$

【100 年歷屆試題.】

解答 B

解析 (A)$\cos100°=\cos(90°+10°)=-\sin10°$

$\sin2011°=\sin(360°\times5+211°)=\sin211°=\sin(180°+31°)=-\sin31°$

$\cos100°-\sin2011°=-\sin10°-(-\sin31°)=\sin31°-\sin10°>0$

（$\because$ $10°<31°$ $\Rightarrow$ $\sin10°<\sin31°$）

(B)$\cos^2 100°-\sin^2 100°$

$=\cos(2\times100°)=\cos200°=\cos(180°+20°)=-\cos20°<0$

(C)$\cos^2 2011°-\sin^2 2011°$

$=\cos(2\times2011°)=\cos4022°=\cos(360°\times11+62°)=\cos62°>0$

(D)$\cos100°\cos2011°-\sin100°\sin2011°$

$=\cos(100°+2011°)=\cos2111°=\cos(360°\times5+311°)=\cos311°$

$=\cos(360°-49°)=\cos49°>0$

( ) 16.已知△ABC 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=6$，則 $\sin A=$

(A)$-\frac{\sqrt{63}}{8}$ (B)$-\frac{7}{8}$ (C)$\frac{7}{8}$ (D)$\frac{\sqrt{63}}{8}$

【093 年歷屆試題.】

解答 D

解析 △ABC 中，$\overline{AB}=c=4$，$\overline{AC}=b=5$，$\overline{BC}=a=6$

由餘弦定理知

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+4^2-6^2}{2\times5\times4}=\frac{1}{8}$$

又 $\angle A$ 為△ABC 的內角 $\Rightarrow$ $0°<\angle A<180°$

$$\therefore\ \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-(\frac{1}{8})^2}=\sqrt{\frac{63}{64}}=\frac{\sqrt{63}}{8}$$

( ) 17.設向量 $\overrightarrow{u}=(a,2)$，$\overrightarrow{v}=(3,2a)$，$\overrightarrow{w}=(-1,2)$，則下列敘述何者正確？ (A)若 $2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{w}$ 平行，則 $a=-3$ (B)若 $(2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}=0$，則 $a=-\frac{5}{2}$ (C)若 $|2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=5$，則 $a=-\frac{1}{2}$ (D)若 $|2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{w}|$，則 $a=0$

【101 年歷屆試題.】

解答 B

解析

$2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=2(a,2)+(3,2a)=(2a,4)+(3,2a)=(2a+3,4+2a)$

$|2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=\sqrt{(2a+3)^2+(4+2a)^2}$

$=\sqrt{(4a^2+12a+9)+(16+16a+4a^2)}$

$=\sqrt{8a^2+28a+25}$

$|\overrightarrow{w}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

(A)$\because$ $2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{w}$ 平行 $\therefore$ $\frac{2a+3}{-1}=\frac{4+2a}{2}$

$\Rightarrow$ $2\times(2a+3)=-(4+2a)$ $\Rightarrow$ $4a+6=-4-2a$

$\Rightarrow$ $6a=-10$ $\Rightarrow$ $a=-\frac{5}{3}$

(B)$\because$ $(2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}=0$ $\therefore$ $(2a+3,4+2a)\cdot(-1,2)=0$

$\Rightarrow$ $(2a+3)\times(-1)+(4+2a)\times2=0$

$\Rightarrow$ $(-2a-3)+(8+4a)=0$ $\Rightarrow$ $2a+5=0$ $\Rightarrow$ $a=-\frac{5}{2}$

(C)$\because$ $|2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=5$ $\therefore$ $\sqrt{8a^2+28a+25}=5$

$\stackrel{平方}{\Rightarrow}$ $8a^2+28a+25=25$ $\Rightarrow$ $8a^2+28a=0$

$\stackrel{\div4}{\Rightarrow}$ $2a^2+7a=0$ $\Rightarrow$ $a(2a+7)=0$ $\Rightarrow$ $a=0$ 或 $-\frac{7}{2}$

(D)$\because$ $|2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{w}|$ $\therefore$ $\sqrt{8a^2+28a+25}=\sqrt{5}$

$\stackrel{平方}{\Rightarrow}$ $8a^2+28a+25=5$ $\Rightarrow$ $8a^2+28a+20=0$

$\stackrel{\div4}{\Rightarrow}$ $2a^2+7a+5=0$ $\Rightarrow$ $(2a+5)(a+1)=0$ $\Rightarrow$ $a=-\frac{5}{2}$ 或 -1

( ) 18.有一籃球隊共有 12 位選手，其前鋒、中鋒、後衛的人數分別為 4 人、3 人、5 人，現在要選 5 位選手上場比賽，一般籃球比賽中，每隊的前鋒、中鋒、後衛人數分別為 2 人、1 人、2 人，問共有幾種不同選法？ (A)120 (B)154 (C)180 (D)225

【099 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $C^4_2\times C^3_1\times C^5_2=\frac{4!}{2!2!}\times\frac{3!}{1!2!}\times\frac{5!}{2!3!}=180$

故選(C)

(　　)19.若 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|\ ,\ x\neq 0\\ 2\ ,\ x=0\end{cases}$，則 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$　(A) -1　(B)0

(C)1　(D)2

【092 年歷屆試題.】

解答　B

解析　∵　$f(x)=\begin{cases}|\sin x|\ ,\ x\neq 0\\ 2\ ,\ x=0\end{cases}$　⇒

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}|\sin x|=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x=0$

又 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}|\sin x|=\lim\limits_{x\to 0^-}(-\sin x)=0$

∴　$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

(　　)20.已知 a、b 為實數，且 $3^a=5$，$5^b=9$，則 $ab=$　(A) $\log_{15}45$　(B) $\log_3 5$　(C) 2　(D) 3

【104 年歷屆試題.】

解答　C

解析　由對數的定義：

$3^a=5$　⇒　$\log_3 5=a$

$5^b=9$　⇒　$\log_5 9=b$

則 $ab=\log_3 5\times\log_5 9=\log_3 9=2$

(　　) 21.甲、乙、丙、丁、戊、己、庚七人排成一列。若甲、乙、丙、丁四人必排在此列的最前面四位，且甲、乙不相鄰，則此七人共有多少種排法？　(A)36　(B)72　(C)144　(D)840

【100 年歷屆試題.】

解答　B

解析　(　　) 22.設 k 為實數，若任意實數 x 均使 kx^2-2x+k 恆為正數，則 k 之範圍為何？　(A) $k>1$　(B) $0<k<1$　(C) $-1<k<0$　(D) $k<-1$【094 年歷屆試題.】

∵　甲、乙不相鄰

∴　甲、乙最後排入

①先排丙丁：2!

②甲、乙插入丙丁的空隙：P^3_2

③再排戊、己、庚：3!

由①、②、③，有 $2!\times P^3_2\times 3!=72$ 種排法

解答　A

解析　∵　kx^2-2x+k 恆為正數

⇒ $\begin{cases}k>0\\ (-2)^2-4\times k\times k<0\end{cases}$ ⇒ $\begin{cases}k>0\\ 4k^2-4>0\end{cases}$

⇒ $\begin{cases}k>0\\ (k+1)(k-1)>0\end{cases}$ ⇒ $\begin{cases}k>0\\ k>1 \text{ 或 } k<-1\end{cases}$

∴　k 的範圍為 $k>1$

(　　) 23.設 a、b、c 三個數均為正實數，且已知 $a+c=36$，若 a、b、12 三數成等差數列，且 2、b、c 三數成等比數列，則下列敘述何者有誤？　(A) $b+c=32$　(B) $a+b=12$　(C) $b^2=2c$　(D) $2b=a+12$

【103 年歷屆試題】

解答　A

解析　∵　a、b、12 為等差數列　∴　$b=\dfrac{a+12}{2}$

⇒　$2b=a+12$（選項(D)）　⇒　$a=2b-12\cdots\cdots$①

∵　2、b、c 為等比數列　∴　$b^2=2c$（選項(C)）　⇒

$c=\dfrac{1}{2}b^2\cdots\cdots$②

把 $a=2b-12$，$c=\dfrac{1}{2}b^2$ 代入 $a+c=36$

則 $(2b-12)+\dfrac{1}{2}b^2=36$　$\overset{\times 2}{\Rightarrow}$　$4b-24+b^2=72$　⇒

$b^2+4b-96=0$

⇒　$(b-8)(b+12)=0$　⇒　$b=8$ 或 -12

而 b 為正實數，故 $b=8$

把 $b=8$ 代入①與②，則 $a=2\times 8-12=4$，$c=\dfrac{1}{2}\times 8^2=32$

(A) $b+c=8+32=40$

(B) $a+b=4+8=12$

故選(A)

(　　) 24.試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1+2+3+\cdots+n)}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=$ (A)0(B) $\dfrac{2}{3}$ (C)1(D) $\dfrac{3}{2}$

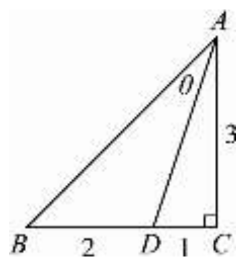
【095 年歷屆試題.】

解答　D

解析

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1+2+3+\cdots+n)}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\times\dfrac{n(n+1)}{2}}{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2+\cdots}$

(　　) 25.已知△ABC 中，$\angle C=90°$，D 在 $\overline{BC}$ 線段上，且線段長 $\overline{BD}=2$，$\overline{DC}=1$，$\overline{AC}=3$，如圖所示。令 $\angle BAD=\theta$，求 $\cos\theta=$



(A) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$　(B) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　(C) $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$　(D) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

【100 年歷屆試題.】

解答　D

解析　在直角△ABC 中，$\overline{AB}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

在直角△ADC 中，$\overline{AD}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

在△ABD 中，

$$\cos\theta = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{AD}} = \frac{(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2^2}{2 \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$