

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

() 1. A 、 B 、 C 為樣本空間 S 之三事件，若

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, \text{ 且 } P(A \cap B) = P(B \cap C) =$$

$$0, P(A \cap C) = \frac{1}{8}, \text{ 則 } A、B、C \text{ 三事件至少有一事件}$$

$$\text{發生的機率為 (A) } \frac{7}{8} \quad \text{(B) } \frac{3}{4} \quad \text{(C) } \frac{5}{8} \quad \text{(D) } \frac{1}{2}$$

【龍騰自命題】

解答 C

$$\text{解析 } \because P(A \cap B) = P(B \cap C) = 0$$

$$\therefore P(A \cap B \cap C) = 0$$

三事件至少有一事件發生的機率

$$= P(A \cup B \cup C)$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 - 0 - \frac{1}{8} + 0 = \frac{5}{8}$$

() 2. $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ ，若 $S_n = n^2 + 3n$ ，則 $a_n =$ (A) $2n - 2$ (B) $2n - 1$ (C) $2n + 2$ (D) $2n + 4$

【龍騰自命題】

解答 C

$$\text{解析 } a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 3n - (n-1)^2 - 3(n-1) = 2n + 2$$

() 3. 1 到 500 之間有兩個等差數列：2, 5, 8, 11, ... 與 1, 5, 9, 13, ...，同時出現在這兩個數列的數共有幾項？
(A) 42 (B) 39 (C) 38 (D) 36 (E) 35

【課本練習題-自我評量】

解答 A

解析 將已知的兩個等差數列多列前面幾項，以便觀察他們的共同項

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, \dots$$

$$1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, \dots$$

觀察上述二等差數列，得知共同項為 5, 17, 29, 41, ...

$$\Rightarrow a_n = 5 + (n-1) \times 12 < 500 \Rightarrow 12n < 507$$

$$\Rightarrow n < 42 \frac{1}{4}$$

$$\therefore n = 42$$

() 4. 若 $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n > 1000$ ，則 n 之最小整數值為
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11

【龍騰自命題】

解答 B

$$\text{解析 } 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} > 1000$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} > 1001 \Rightarrow n + 1 \text{ 最小整數值為 } 10 \Rightarrow n$$

最小整數值為 9

() 5. 設 $(67)^x = 27$ ， $(603)^y = 81$ ，則 $\frac{3}{x} - \frac{4}{y} =$ (A) 3 (B) 0 (C) -1 (D) -2

【龍騰自命題】

解答 D

$$\text{解析 } \begin{cases} 67^x = 27 = 3^3 \\ 603^y = 81 = 3^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 67 = 3^{\frac{3}{x}} \\ 603 = 3^{\frac{4}{y}} \end{cases}, \text{ 故 } \frac{67}{603} = \frac{3^{\frac{3}{x}}}{3^{\frac{4}{y}}} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}$$

$$\therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

() 6. 方程式 $2^{2x+2} = 9 \times 2^x - 2$ 之解為 (A) -2 或 1 (B) -1 或 2 (C) -2 (D) -1

【龍騰自命題】

解答 A

$$\text{解析 } 2^{2x+2} = 9 \times 2^x - 2 \Rightarrow 4 \times 2^{2x} - 9 \times 2^x + 2 = 0$$

$$\text{令 } 2^x = k \Rightarrow 4k^2 - 9k + 2 = 0 \Rightarrow (4k-1)(k-2) = 0$$

$$\text{故 } k = \frac{1}{4} \text{ 或 } 2, \text{ 即 } x = -2 \text{ 或 } 1$$

() 7. 解 $(\frac{3}{4})^{x+2} = (\frac{4}{3})^{2x-5}$ 得 x 之值為 (A) -1 (B) -2 (C) 2 (D) 1

【龍騰自命題】

解答 D

$$\text{解析 } (\frac{3}{4})^{x+2} = (\frac{3}{4})^{5-2x} \therefore x+2 = 5-2x, x=1$$

() 8. 化簡 $(\log_{10} 2)^3 + (\log_{10} 5)^3 + (\log_{10} 5)(\log_{10} 8)$ 得其值為
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【龍騰自命題】

解答 A

$$\text{解析 } (\log_{10} 2 + \log_{10} 5)^3 = (\log_{10} 2)^3 + (\log_{10} 5)^3 +$$

$$3(\log_{10} 2)(\log_{10} 5)(\log_{10} 2 + \log_{10} 5)$$

$$= (\log_{10} 2)^3 + (\log_{10} 5)^3 + (\log_{10} 8)(\log_{10} 5)$$

$$\text{原式} = (\log_{10} 2 + \log_{10} 5)^3 = (\log_{10} 10)^3 = 1$$

() 9. 正整數 7^{2009} 乘開後的數字，其末二位數字為何？
(A) 01 (B) 07 (C) 43 (D) 49

【098 年歷屆試題】

解答 B

$$\text{解析 } 7^1 = 7 \Rightarrow \text{末二位 } 07$$

$$7^2 = 49 \Rightarrow \text{末二位 } 49$$

$$7^3 = 343 \Rightarrow \text{末二位 } 43$$

$$7^4 = 2401 \Rightarrow \text{末二位 } 01$$

$$7^5 = 16807 \Rightarrow \text{末二位 } 07$$

⋮

週期為 4

$$\Rightarrow 7^{2009} \text{ 的末二位} = 7^1 \text{ 的末二位} = 07$$

- () 10. 用 100 元購買 5 元、10 元及 20 元的郵票，每一種郵票至少買 1 張，100 元全部用完，則購買方法有 (A)16 種 (B)20 種 (C)27 種 (D)35 種

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 設 5 元 x 張，10 元 y 張， x, y 為正整數

① 20 元 1 張， $5x + 10y = 80$

x	14	12	10	8	6	4	2
y	1	2	3	4	5	6	7

共 7 種

② 20 元 2 張， $5x + 10y = 60$

x	10	8	6	4	2
y	1	2	3	4	5

共 5 種

③ 20 元 3 張， $5x + 10y = 40$

x	6	4	2
y	1	2	3

共 3 種

④ 20 元 4 張， $5x + 10y = 20$

x	2
y	1

共 1 種

$\therefore 7 + 5 + 3 + 1 = 16$

- () 11. 滿足 $0 \leq \log_2[\log_2(\log_2 x)] \leq 1$ 之整數 x 共有 (A)10 個 (B)11 個 (C)12 個 (D)13 個

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 由 $0 \leq \log_2[\log_2(\log_2 x)]$ ，知 $\log_2(\log_2 x) \geq 1 \quad \therefore \log_2 x \geq 2, x \geq 4$

又由 $\log_2[\log_2(\log_2 x)] \leq 1$ ，知 $\log_2(\log_2 x) \leq 2 \quad \therefore \log_2 x \leq 4, x \leq 16$

故 $4 \leq x \leq 16$ ，共 13 個

- () 12. 已知 $\sum_{k=0}^4 (ak + b) = 25$ ， $\sum_{k=2}^5 (ak - b) = 24$ ，則 $a =$ (A)0 (B)1 (C)2 (D)3

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $\begin{cases} 10a + 5b = 25 \\ 14a - 4b = 24 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 1$

- () 13. 桔子 5 個、蘋果 4 個、鳳梨 3 個，全部分給甲、乙 2 人，若每人至少得 1 個，則方法有 (A)119 種 (B)118 種 (C)60 種 (D)59 種

【龍騰自命題.】

解答 B

解析

$H_5^2 \times H_4^2 \times H_3^2 - 2 = C_5^6 \times C_4^5 \times C_3^4 - 2 = 6 \times 5 \times 4 - 2 = 118$

(種)

- () 14. 設袋中有一元、五元、十元、五十元硬幣各一枚，問小蓮從袋中任取一個硬幣幣值之數學期望值為多少元？ (A)16.5 (B)16 (C)15.5 (D)15

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $\frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 5 + \frac{1}{4} \times 10 + \frac{1}{4} \times 50 = 16.5$ (元)

- () 15. 從 1 到 100 之自然數中，任取一數它不是完全平方數，也不是完全立方數的機率為 (A) $\frac{14}{100}$ (B) $\frac{86}{100}$

(C) $\frac{88}{100}$ (D) $\frac{90}{100}$ (E) $\frac{91}{100}$

【課本練習題-自我評量】

解答 C

解析 1 到 100 中是完全平方數的事件 $A =$

$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

1 到 100 中是完全立方數的事件 $B = \{1, 8, 27, 64\}$

$A \cap B = \{1, 64\}$

$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 10 + 4 - 2 = 12$

所求機率 $= 1 - \frac{12}{100} = \frac{88}{100}$

- () 16. 已知一袋中有大小相同的球共 200 顆，每顆球上都印有一個不同的號碼，分別是 1 至 200 號，今從袋中隨機抽出一球，假設每球被抽中的機會均等，則下列敘述何者正確？ (A) 被抽中的球號是 3 的倍數或者是

5 的倍數的機率為 $\frac{94}{200}$ (B) 被抽中的球號不是 3 的

倍數而且是 5 的倍數的機率為 $\frac{30}{200}$ (C) 被抽中的球

號是 3 的倍數而且不是 5 的倍數的機率為 $\frac{53}{200}$ (D)

被抽中的球號不是 3 的倍數而且不是 5 的倍數的機率為 $\frac{113}{200}$

【103 年歷屆試題.】

解答 C

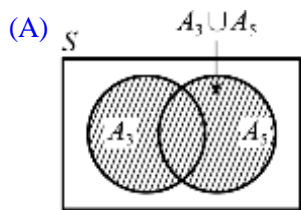
解析 設 S 為樣本空間， A_k 為被抽中的球號是 k 的倍數之事件 (如： A_3 為被抽中的球號是 3 的倍數之事件)

則 $n(S) = 200$

$\therefore 200 \div 3 = 66 \cdots 2 \quad \therefore n(A_3) = 66$

$\therefore 200 \div 5 = 40 \quad \therefore n(A_5) = 40$

$\therefore 200 \div 15 = 13 \cdots 5 \quad \therefore n(A_{15}) = 13$

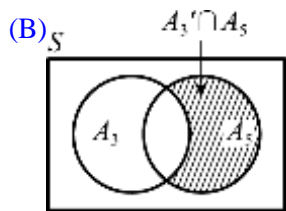


$$n(A_3 \cup A_5) = n(A_3) + n(A_5) - n(A_3 \cap A_5)$$

$$= n(A_3) + n(A_5) - n(A_{15})$$

$$= 66 + 40 - 13 = 93$$

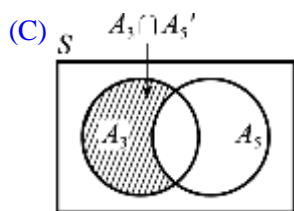
$$\text{所求} = \frac{n(A_3 \cup A_5)}{n(S)} = \frac{93}{200}$$



$$n(A_3' \cap A_5) = n(A_5) - n(A_3 \cap A_5) = n(A_5) - n(A_{15})$$

$$= 40 - 13 = 27$$

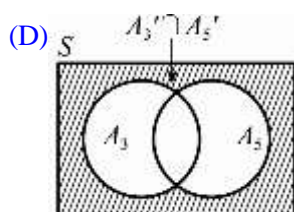
$$\text{所求} = \frac{n(A_3' \cap A_5)}{n(S)} = \frac{27}{200}$$



$$n(A_3 \cap A_5') = n(A_3) - n(A_3 \cap A_5) = n(A_3) - n(A_{15})$$

$$= 66 - 13 = 53$$

$$\text{所求} = \frac{n(A_3 \cap A_5')}{n(S)} = \frac{53}{200}$$



$$n(A_3' \cap A_5') = n(S) - n(A_3 \cup A_5) = 200 - 93 = 107$$

$$\text{所求} = \frac{n(A_3' \cap A_5')}{n(S)} = \frac{107}{200}$$

- () 17. 滿足 $x + y + z + u \leq 6$ 的正整數解有 (A)10 組 (B)15 組 (C)84 組 (D)210 組

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $x + y + z + u \leq 6, x, y, z, u$ 為正整數 $\Rightarrow x + y + z + u$

$$+ t = 6$$

x, y, z, u 為正整數, t 為非負整數

$$\therefore H_{6-4}^5 = H_2^5 = C_2^6 = 15 \text{ (組)}$$

- () 18. 求多項式 $(2x - 1)^5(x + 1)$ 之 x^2 項的係數為何? (A) -30 (B) -20 (C) 20 (D) 30

【102 年歷屆試題.】

解答 A

解析 $(2x - 1)^5(x + 1) = (2x - 1)^5x + (2x - 1)^5 \cdots \textcircled{1}$

在 $(2x - 1)^5$ 的展開式之中

$$x \text{ 項: } C_4^5(2x)(-1)^4 = 10x, x^2 \text{ 項: } C_3^5(2x)^2(-1)^3 = -40x^2$$

則 $(2x - 1)^5x$ 的 x^2 項為 $10x^2$

$$\text{由 } \textcircled{1} \text{ 可知 } (2x - 1)^5(x + 1) \text{ 的 } x^2 \text{ 項為 } 10x^2 + (-40x^2) = -30x^2$$

故 x^2 項的係數為 -30

- () 19. 設 $(1.02)^8$ 乘開, 小數點後第一、二、三、四位分別為 a, b, c, d , 則 $a + b + c + d$ 之值為 (A)12 (B)13 (C)14 (D)15

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $(1.02)^8 = (1 + 0.02)^8$

$$=$$

$$C_0^8 \times 1^8 + C_1^8 \times 1^7 \times (0.02) + C_2^8 \times 1^6 \times (0.02)^2 + C_3^8 \times 1^5 \times (0.02)^3 + \cdots$$

$$= 1 + 0.16 + 0.0112 + 0.000448 + \cdots \approx 1.171648 \cdots$$

$$\therefore a = 1, b = 7, c = 1, d = 6$$

$$a + b + c + d = 15$$

- () 20. 集合 $\{(x, y, z) | x^2 + 3y + z = 20, x, y, z \text{ 為自然數}\}$ 之元素個數為 (A)13 (B)14 (C)15 (D)16

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $\textcircled{1} x = 1, 3y + z = 19 \rightarrow 6 \text{ 組} \Rightarrow$

y	1	2	3	4	5	6
z	16	13	10	7	4	1

6 組

$\textcircled{2} x = 2, 3y + z = 16 \rightarrow 5 \text{ 組} \Rightarrow$

y	1	2	3	4	5
z	13	10	7	4	1

5 組

$\textcircled{3} x = 3, 3y + z = 11 \rightarrow 3 \text{ 組} \Rightarrow$

y	1	2	3
z	8	5	2

3 組

組

$\textcircled{4} x = 4, 3y + z = 4 \rightarrow 1 \text{ 組} \Rightarrow$

y	1
z	1

1 組

$$\therefore 6 + 5 + 3 + 1 = 15$$

- () 21. 投擲三次骰子，設 A 為點數和為 6 之事件，則 A 有多少個元素？ (A)8 (B)9 (C)10 (D)11

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 點數和為 6 的有

$$(1, 1, 4) \Rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \text{ 個}$$

$$(1, 2, 3) \Rightarrow 3! = 6 \text{ 個}$$

$$(2, 2, 2) \Rightarrow 1 \text{ 個}$$

$$\text{故共有 } 3 + 6 + 1 = 10 \text{ 個}$$

- () 22. 甲、乙各擲一個公正的骰子，則甲的點數小於乙的點數的機率為 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{5}{12}$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析

甲的點數	1	2	3	4	5
乙的點數	2~6	3~6	4~6	5、6	6

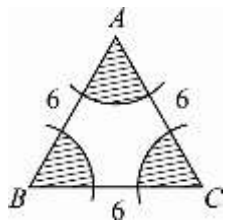
$$\text{故甲的點數小於乙的點數的機率} = \frac{5+4+3+2+1}{6 \times 6} = \frac{5}{12}$$

- () 23. 在邊長為 6 的正三角形內部任取一點 P ，則 P 到三頂點的距離皆大於 $\sqrt{3}$ 的機率為 (A) $\frac{12-\sqrt{3}\pi}{18}$
(B) $\frac{15-\sqrt{3}\pi}{18}$ (C) $\frac{18-\sqrt{3}\pi}{18}$ (D) $\frac{9-\sqrt{3}\pi}{9}$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 以 $\sqrt{3}$ 為半徑， A 、 B 、 C 為圓心畫弧（如圖），則空白部分即是大於 $\sqrt{3}$ 的部分



$$\triangle ABC \text{ 面積} = 9\sqrt{3}, \text{ 空白部分面積} = 9\sqrt{3} - \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore \text{ 機率} = \frac{9\sqrt{3} - \frac{3\pi}{2}}{9\sqrt{3}} = \frac{18 - \sqrt{3}\pi}{18}$$

- () 24. 由一樓上二樓的樓梯共有 10 階，某人以每步踏 1 階或 2 階上樓，則全部方法有 (A)78 種 (B)82 種
(C)86 種 (D)89 種

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 設一步踏 1 階 x 次，2 階 y 次，則

$$x + 2y = 10, x, y \text{ 為非負整數}$$

x	10	8	6	4	2	0
y	0	1	2	3	4	5

$$\frac{10!}{10!} + \frac{9!}{8!} + \frac{8!}{6!2!} + \frac{7!}{4!3!} + \frac{6!}{2!4!} + \frac{5!}{5!} = 89 \text{ 種}$$

- () 25. 一袋中有大小相同的紅球 5 個、白球 3 個、黑球 2 個。今從袋中一次取 3 球，則所取 3 球中至少有 2 球顏色相同的機率為何？ (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{41}{120}$ (C) $\frac{79}{120}$
(D) $\frac{3}{4}$

【098 年歷屆試題】

解答 D

解析 袋中有 $5 + 3 + 2 = 10$ 個球

設袋中一次取 3 球的樣本空間為 S

而 3 球顏色均不同的事件為 A

$$\text{則 } n(S) = C_3^{10} = 120,$$

$$n(A) = C_1^5 \times C_1^3 \times C_1^2 = 30 \Rightarrow$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

$$\text{故 } P(\text{至少 2 球顏色相同}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$