0304 數學第三冊　　姓名　　　　　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　)1.求多項式$(2x-1)^5(x+1)$之x^2項的係數為何？　(A)-30　(B)-20　(C)20　(D)30

【102 年歷屆試題.】

解答　A

解析　$(2x-1)^5(x+1)=\underline{(2x-1)^5x}+\underline{(2x-1)^5}$……①

在$(2x-1)^5$的展開式之中

x項：$C^5_4(2x)(-1)^4=10x$，x^2項：$C^5_3(2x)^2(-1)^3=-40x^2$

則$(2x-1)^5x$的x^2項為$10x^2$

由①可知$(2x-1)^5(x+1)$的x^2項為$10x^2+(-40x^2)=-30x^2$

故x^2項的係數為 -30

(　　)2.若$\log a=-1.0282$，則$\log a$之首數為何？　(A)1　(B)0　(C)-1　(D)-2

【097 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$\log a=-1.0282=-1-0.0282=-1+(-0.0282+1)-1=-2+0.9718$

又$0\le 0.9718<1$

$\therefore$　$\log a$的首數為 -2

(　　)3.一袋中有大小相同的紅球 5 個、白球 3 個、黑球 2 個。今從袋中一次取 3 球，則所取 3 球中至少有 2 球顏色相同的機率為何？(A)$\frac{1}{4}$ (B)$\frac{41}{120}$ (C)$\frac{79}{120}$ (D)$\frac{3}{4}$

【098 年歷屆試題】

解答　D

解析　袋中有$5+3+2=10$個球

設袋中一次取 3 球的樣本空間為S

而 3 球顏色均不同的事件為A

則$n(S)=C^{10}_3=120$，

$$n(A)=C^5_1\times C^3_1\times C^2_1=30\quad\Rightarrow\quad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$$

故P(至少 2 球顏色相同)$=1-P(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

(　　)4.設p、q為二相異正整數，且a_n為一等差數列的第n項。若$a_p=q$，$a_q=p$，則$a_{p+q}=$　(A)0　(B)p　(C)q　(D)$p+q$

【098 年歷屆試題.】

解答　A

解析　a_n為等差數列的第n項

設首項a_1，公差d

$\because$　$a_p=q$　　$\therefore$　$a_1+(p-1)d=q$…①

$\because$　$a_q=p$　　$\therefore$　$a_1+(q-1)d=p$…②

由①$-$②

$(p-q)d=q-p\quad\Rightarrow\quad d=\dfrac{q-p}{p-q}=-1$

$d=-1$代回①

$a_1+(p-1)(-1)=q\quad\Rightarrow\quad a_1=p+q-1$

因此

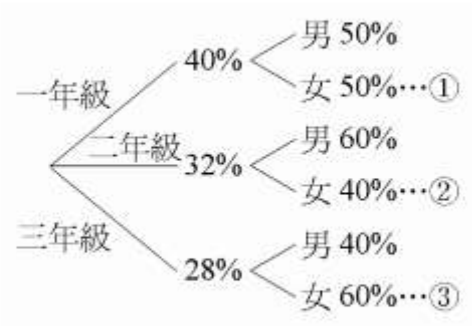
$a_{p+q}=a_1+(p+q-1)d=(p+q-1)+(p+q-1)\times(-1)=0$

(　　)5.中山高中一、二、三年級學生人數的比例分別為 40%、32%、28%，而一、二、三年級男生人數占該年級的比例分別為 50%、60%、40%，現從全校學生中任意選取 1 人，則此人為女生的機率為何？(A)43.2%(B)45.4%(C)47.8%(D)49.6%

【099 年歷屆試題.】

解答　D

解析　由題意，樹狀圖如下：



由①、②、③知所求機率

$=40\%\times 50\%+32\%\times 40\%+28\%\times 60\%=49.6\%$

故選(D)

(　　)6.若$3^{x+2}=3^x+24\sqrt{3}$，則$x=$　(A)$-\frac{1}{2}$　(B)1　(C)$\frac{3}{2}$　(D)2

【102 年歷屆試題.】

解答　C

解析　$3^{x+2}=3^x\times 3^2=9\times 3^x$

$$24\sqrt{3}=8\times 3\times\sqrt{3}=8\times 3\times 3^{\frac{1}{2}}=8\times 3^{1+\frac{1}{2}}=8\times 3^{\frac{3}{2}}$$

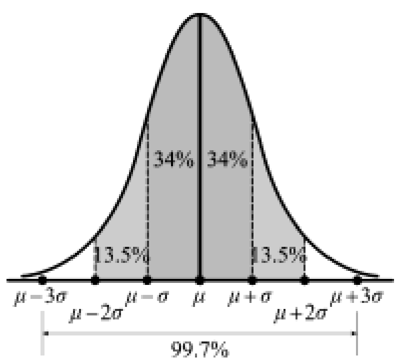
原式　$\Rightarrow$

$$9\times 3^x=3^x+8\times 3^{\frac{3}{2}}\quad\Rightarrow\quad 9\times 3^x-3^x=8\times 3^{\frac{3}{2}}\quad\Rightarrow\quad 8\times 3^x=8\times 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\overset{\div 8}{\Rightarrow}\quad 3^x=3^{\frac{3}{2}}$$

故$x=\frac{3}{2}$

(　　)7.某校全體新生測量身高結果近似常態分配，如圖。若身高的平均數μ為 170 公分，標準差σ為 4 公分，且全體新生中身高小於 166 公分的人數約為 120 人，則此校新生人數與下列何者最接近？



(A)375　(B)750　(C)1125　(D)1500

【102 年歷屆試題.】

解答　B

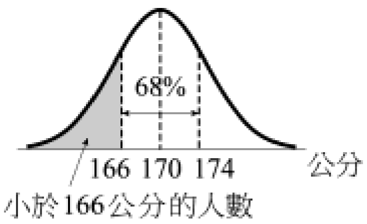
解析　設全校新生約有x人，

$\because$　$166=170-4=\mu-\sigma$　　$\therefore$　小於 166 公分的人數為$\mu-\sigma$以下的人數

即$x\times\frac{1}{2}\times(1-68\%)=\frac{16}{100}x$

則$\frac{16}{100}x=120\quad\Rightarrow\quad x=750$

故新生約有 750 人



(　　　)8.在擲單顆骰子遊戲中，若甲每投一次骰子要先付給乙 x 元，且出現點數為奇數時，乙需付給甲 10 元；出現點數為偶數時，乙需付給甲 40 元，但出現奇數點的機率為出現偶數點機率的 2 倍，則 x 應訂為多少元，此遊戲才是公平的？　(A)15　(B)20　(C)25　(D)30

【099 年歷屆試題】

解答　B

解析　設奇數點的機率為 $P(A)$，偶數點的機率為 $P(B)$　$\Rightarrow$　$P(A)+P(B)=1\cdots①$

$\because$　出現奇數點的機率為出現偶數點機率的 2 倍　$\Rightarrow$　$P(A)=2P(B)$

$P(A)=2P(B)$代入①得

$2P(B)+P(B)=1$　$\Rightarrow$　$P(B)=\dfrac{1}{3}$

則 $P(A)=\dfrac{2}{3}$

為了遊戲公平，付出的錢 ＝ 得到的期望值

$\Rightarrow$　$x=P(A)\times 10+P(B)\times 40=\dfrac{2}{3}\times 10+\dfrac{1}{3}\times 40=20$（元）

故選(B)

(　　　)9.下列各問題中，何者的解答是 C_6^{10} （其中 $C_k^n=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ ）？　(A)10 位學生中任意挑選 6 位同學排成一列，共有幾種情形　(B)10 個不同顏色的球中任意挑選 4 個出來，共有幾種情形　(C)10 張椅子排成一列，6 位同學各自任意挑選 1 張椅子坐下，共有幾種情形　(D)10 個相同的白色球任意挑選 4 個出來，共有幾種情形

【098 年歷屆試題.】

解答　B

解析　(A)10 位同學挑 6 位排成一列，有 P_6^{10} 種方法

(B)10 個不同顏色的球挑選 4 個，有 C_4^{10} 種方法，其中 $C_4^{10}=C_{10-4}^{10}=C_6^{10}$

(C)10 張椅子由 6 位同學各挑 1 張，有 P_6^{10} 種方法

(D)10 個白色球均相同，任挑 4 個，只有 1 種方法

(　　　)10.關於 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^8$ 展開式中，下列敘述何者正確？　(A)常數項為 1160　(B) x^2 項係數為 -448　(C) x^4 項係數為 -112　(D) x^{-8} 項係數為 -256

【103 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^8=\left[x+\left(-\dfrac{2}{x}\right)\right]^8$

(A)常數項：$C_4^8x^4\left(-\dfrac{2}{x}\right)^4=1120$

(B) x^2 項：$C_3^8x^5\left(-\dfrac{2}{x}\right)^3=-448x^2$，則 x^2 項係數為 -448

(C) x^4 項：$C_2^8x^6\left(-\dfrac{2}{x}\right)^2=112x^4$，則 x^4 項係數為 112

(D) x^{-8} 項：$C_8^8x^0\left(-\dfrac{2}{x}\right)^8=256x^{-8}$，則 x^{-8} 項係數為 256

(　　　)11.某位老師想了解某班級學生數學程度，隨機抽取十一位同學得到他們入學考的數學成績如下：60、55、20、45、70、90、30、60、45、45、30（單位：分），已知其算術平均數等於 50，則這些分數的樣本標準差為何？（註：樣本標準差 $S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$）(A) 15 分　(B) 20 分　(C) 25 分　(D) 30 分

【103 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$\because$　算術平均數 $=50$

$\therefore$　離均差的平方和 $=(60-50)^2+(55-50)^2+(20-50)^2+(45-50)^2$
$+(70-50)^2+(90-50)^2+(30-50)^2+(60-50)^2$
$+(45-50)^2+(45-50)^2+(30-50)^2$
$=4000$

則樣本標準差 $=\sqrt{\dfrac{1}{11-1}\times 4000}=\sqrt{400}=20$（分）

〈另解〉

把成績均乘以 $\dfrac{1}{5}$，則新成績如下：

12、11、4、9、14、18、6、12、9、9、6

其算術平均數 $=\dfrac{1}{5}\times 50=10$

離均差的平方和

$=(12-10)^2+(11-10)^2+(4-10)^2+(9-10)^2+(14-10)^2+(18-10)^2$
$+(6-10)^2+(12-10)^2+(9-10)^2+(9-10)^2+(6-10)^2$
$=160$

樣本標準差 $=\sqrt{\dfrac{1}{11-1}\times 160}=\sqrt{16}=4$（分）

故原來成績的標準差 $=5\times 4=20$（分）

(　　　)12.有一組資料：0、3、6、9、12、15，設其平均值與標準差分別為 a 、b ，則關於另一組資料：-1、-2、-3、-4、-5、-6 的平均值與標準差的敘述，何者正確？　(A)平均值為 $-3a+1$，標準差為 $\dfrac{b}{9}$　(B)平均值為 $-\dfrac{a}{3}-1$，標準差為 $\dfrac{b}{3}$　(C)平均值為 $-3a+1$，標準差為 $\dfrac{b}{3}$　(D)平均值為 $-\dfrac{a}{3}-1$，標準差為 $\dfrac{b}{9}$

【106 年歷屆試題.】

解答　B

解析　令 $S_1=\{0,3,6,9,12,15\}=\{x_k\,|\,k=1,2,3,4,5,6\}$

則 S_1 的平均值與標準差為 a 、b

設題目的另一組資料為 S_2

則 $S_2=\left\{-\dfrac{1}{3}x_k-1\,\middle|\,k=1,2,3,4,5,6\right\}$

其平均值為 $-\dfrac{1}{3}\times a-1=-\dfrac{a}{3}-1$

標準差為 $\left|-\dfrac{1}{3}\right|\times b=\dfrac{b}{3}$

(　　　) 13.設 r 為有理數，且 $5^r=4(\sqrt[3]{40}+\frac{\sqrt[3]{5}}{2})^2$，則 $r=$　(A) $\frac{8}{3}$　(B) $\frac{10}{3}$　(C)8　(D)10

【099 年歷屆試題.】

解答　A

解析

$$4(\sqrt[3]{40}+\frac{\sqrt[3]{5}}{2})^2=4(\sqrt[3]{8\times5}+\frac{\sqrt[3]{5}}{2})^2=4(2\sqrt[3]{5}+\frac{\sqrt[3]{5}}{2})^2=4(\frac{5\sqrt[3]{5}}{2})^2=4(\frac{5^{\frac{4}{3}}}{2})^2$$

$$=4\times\frac{5^{\frac{8}{3}}}{4}=5^{\frac{8}{3}}$$

$\therefore\ r=\frac{8}{3}$

故選(A)

(　　　) 14.已知 $\log_{10}3=0.4771$ 且 $x=\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$，其中 $\log_{10}x$ 的首數為 m，而尾數的小數點後第一位數字為 n，則 $m+n=$　(A) -9　(B) -7　(C) -6　(D) -5

【106 年歷屆試題.】

解答　C

解析　$x=\left(\frac{1}{3}\right)^{20}=\left(3^{-1}\right)^{20}=3^{-1\times20}=3^{-20}$

$\log_{10}x=\log_{10}3^{-20}=(-20)\times\log_{10}3$

$=(-20)\times0.4771=-9.542=-10+0.458$

$\log_{10}x$ 的首數 $m=-10$，尾數為 0.458

而尾數的小數點後第一位數字為 n，則 $n=4$

故 $m+n=-10+4=-6$

(　　　) 15.設 $\left(\frac{1}{2}\right)^a=\frac{1}{70}$，$\left(\frac{1}{4}\right)^b=\frac{1}{2500}$，$\left(\frac{1}{8}\right)^c=\frac{1}{216000}$，則 a、b、c 三個數的大小關係為何？　(A) $b<c<a$　(B) $c<b<a$　(C) $c<a<b$　(D) $a<b<c$

【103 年歷屆試題.】

解答　A

解析　$\because\ \left(\frac{1}{4}\right)^b=\frac{1}{2500}$

$\Rightarrow\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^b=\left(\frac{1}{50}\right)^2\ \Rightarrow\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)^b\right]^2=\left(\frac{1}{50}\right)^2$

$\therefore\ \left(\frac{1}{2}\right)^b=\frac{1}{50}$　　$\because\ \left(\frac{1}{8}\right)^c=\frac{1}{216000}$

$\Rightarrow\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^c=\left(\frac{1}{60}\right)^3\ \Rightarrow\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)^c\right]^3=\left(\frac{1}{60}\right)^3$

$\therefore\ \left(\frac{1}{2}\right)^c=\frac{1}{60}$

而 $\frac{1}{50}>\frac{1}{60}>\frac{1}{70}\ \Rightarrow\ \left(\frac{1}{2}\right)^b>\left(\frac{1}{2}\right)^c>\left(\frac{1}{2}\right)^a$

$\because\ y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 為遞減函數　$\therefore\ b<c<a$

(　　　) 16.設 $\frac{1}{3^x}=9^y$，則下列何者正確？(A) $2x=y$ (B) $x=2y$　(C) $2x=-y$　(D) $x=-2y$

【092 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$\because\ \frac{1}{3^x}=9^y\ \Rightarrow\ 3^{-x}=3^{2y}\ \Rightarrow\ -x=2y$

$\therefore\ x=-2y$

(　　　) 17.若 $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{8\times\sqrt[5]{64}}=4^a$，則 $a=$　(A) $\frac{19}{20}$　(B) $\frac{29}{30}$　(C) $\frac{19}{10}$　(D) $\frac{29}{15}$

【100 年歷屆試題.】

解答　A

解析　$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{8\times\sqrt[5]{64}}$

$$=2^{\frac{1}{2}}\times(2^3\times2^{\frac{6}{5}})^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}}\times(2^{3+\frac{6}{5}})^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}}\times(2^{\frac{21}{5}})^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{21}{5}\times\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{7}{5}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{7}{5}}=$$

而 $4^a=(2^2)^a=2^{2a}$，

因此 $2a=\frac{19}{10}\ \Rightarrow\ a=\frac{19}{20}$

(　　　) 18.設 $a>0$ 且 $a\neq1$，若 $\log_a3+\log_a7=3$，則 $a=$(A) $\sqrt[3]{21}$　(B) $\sqrt{21}$　(C)3　(D)7

【096 年歷屆試題.】

解答　A

解析　$\because\ \log_a3+\log_a7=3\ \Rightarrow\ \log_a21=3\ \Rightarrow\ a^3=21$

$\therefore\ a=\sqrt[3]{21}$

(　　　) 19.求 $\log_{\sqrt{2}}\frac{3}{2}-\log_2\frac{27}{160\sqrt{2}}+\log_4\frac{36}{25}=$ (A) $\frac{5}{2}$　(B) $\frac{7}{2}$　(C) $\frac{9}{2}$　(D) $\frac{11}{2}$

【100 年歷屆試題.】

解答　C

解析　所求

$$=\log_{(\sqrt{2})^2}(\frac{3}{2})^2-\log_2\frac{27}{160\sqrt{2}}+\log_{\sqrt{4}}\sqrt{\frac{36}{25}}=\log_2\frac{9}{4}-\log_2\frac{27}{160\sqrt{2}}+\log_2\frac{6}{5}$$

$$=\log_2[(\frac{9}{4}\div\frac{27}{160\sqrt{2}})\times\frac{6}{5}]=\log_2 16\sqrt{2}=\log_2(2^4\times2^{\frac{1}{2}})=\log_2 2^{4+\frac{1}{2}}$$

$$=\log_2 2^{\frac{9}{2}}=\frac{9}{2}$$

(　　　) 20.化簡 $\dfrac{2+\log_{10}4-\frac{1}{3}\log_{10}216+\frac{1}{4}\log_{10}625+\frac{1}{5}\log_{10}243}{1+\log_2\frac{5}{3}+\log_2\frac{6}{5}+\log_2\frac{7}{6}+3\log_8\frac{8}{7}+2\log_4\frac{9}{8}-\log_4 9}$ 得其值為何？　(A)1　(B) $\frac{3}{2}$　(C)2　(D)3

【103 年歷屆試題.】

解答　D

解析　原式的分子 $=2+\log_{10}4-\frac{1}{3}\log_{10}6^3+\frac{1}{4}\log_{10}5^4+\frac{1}{5}\log_{10}3^5$

$$=2+\log_{10}4-\frac{1}{3}\times3\log_{10}6+\frac{1}{4}\times4\log_{10}5+\frac{1}{5}\times5\log_{10}3$$

$=2+\left(\log_{10}4-\log_{10}6+\log_{10}5+\log_{10}3\right)=2+\log_{10}\dfrac{4\times5\times3}{6}$

$=2+\log_{10}10=2+1=3$

原式的分母$=1+\log_2\dfrac{5}{3}+\log_2\dfrac{6}{5}+\log_2\dfrac{7}{6}+3\log_{2^3}\dfrac{8}{7}+2\log_{2^2}\dfrac{9}{8}-\log_{2^2}3^2$

$=1+\log_2\dfrac{5}{3}+\log_2\dfrac{6}{5}+\log_2\dfrac{7}{6}+3\times\dfrac{1}{3}\log_2\dfrac{8}{7}+2\times\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{9}{8}-\log_2 3$

$=1+\left(\log_2\dfrac{5}{3}+\log_2\dfrac{6}{5}+\log_2\dfrac{7}{6}+\log_2\dfrac{8}{7}+\log_2\dfrac{9}{8}\right)-\log_2 3$

$=1+\log_2\left(\dfrac{5}{3}\times\dfrac{6}{5}\times\dfrac{7}{6}\times\dfrac{8}{7}\times\dfrac{9}{8}\right)-\log_2 3=1+\log_2 3-\log_2 3=1$

故原式$=\dfrac{3}{1}=3$

(　　)21.已知 a 、b 為實數，且 $3^a=5$ ，$5^b=9$ ，則 $ab=$　(A) $\log_{15}45$　(B) $\log_3 5$　(C) 2　(D) 3

【104 年歷屆試題.】

解答　C

解析　由對數的定義：

$3^a=5\ \Rightarrow\ \log_3 5=a$

$5^b=9\ \Rightarrow\ \log_5 9=b$

則 $ab=\log_3 5\times\log_5 9=\log_3 9=2$

(　　)22.已知 $\log_{10}2=p$ ，$\log_{10}3=q$ ，求 $\log_{\sqrt{6}}36-\log_{\frac{1}{6}}6+\log_6\sqrt{12}$ 之值為　(A) $5+\dfrac{2p+q}{2p+2q}$　(B) $3+\dfrac{2p+q}{2p+2q}$　(C) $3+\dfrac{2p+q}{2p-2q}$　(D) $5+\dfrac{2p+q}{2p-2q}$

【105 年歷屆試題.】

解答　A

解析　$\log_{\sqrt{6}}36=\log_{6^{\frac{1}{2}}}6^2=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}\log_6 6=4$

$\log_{\frac{1}{6}}6=\log_{6^{-1}}6=\dfrac{1}{-1}\log_6 6=-1$

$\log_6\sqrt{12}=\log_6 12^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_6 12=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\log_{10}12}{\log_{10}6}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\log_{10}\left(2^2\times3\right)}{\log_{10}\left(2\times3\right)}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\log_{10}2^2+\log_{10}3}{\log_{10}2+\log_{10}3}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}2+\log_{10}3}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2p+q}{p+q}=\dfrac{2p+q}{2p+2q}$

所求$=4-(-1)+\dfrac{2p+q}{2p+2q}=5+\dfrac{2p+q}{2p+2q}$

(　　)23.將 0、0、2、2、9、9、9、9 八個數字全取，排成一列，可得幾個不同的八位數？　(A)155　(B)210　(C)315　(D)420

【101 年歷屆試題.】

解答　C

解析　八個數字有二個 0，二個 2，四個 9

所求=(任意排)－(0 排首位)=$\dfrac{8!}{2!2!4!}-\dfrac{7!}{2!4!}=420-105=315$（個）

(　　)24.已知一袋中有大小相同的球共 200 顆，每顆球上都印有一個不同的號碼，分別是 1 至 200 號，今從袋中隨機抽出一球，假設每球被抽中的機會均等，則下列敘述何者正確？　(A)被抽中的球號是 3 的倍數或者是 5 的倍數的機率為 $\dfrac{94}{200}$　(B)被抽中的球號不是 3 的倍數而且是 5 的倍數的機率為 $\dfrac{30}{200}$　(C)被抽中的球號是 3 的倍數而且不是 5 的倍數的機率為 $\dfrac{53}{200}$　(D)被抽中的球號不是 3 的倍數而且不是 5 的倍數的機率為 $\dfrac{113}{200}$

【103 年歷屆試題.】

解答　C

解析　設 S 為樣本空間，A_k 為被抽中的球號是 k 的倍數之事件（如：A_3 為被抽中的球號是 3 的倍數之事件）

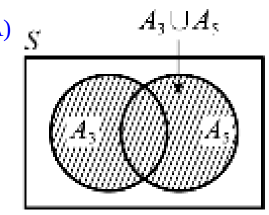
則 $n(S)=200$

$\because\ 200\div3=66\cdots2\quad\therefore\ n(A_3)=66$

$\because\ 200\div5=40\quad\therefore\ n(A_5)=40$

$\because\ 200\div15=13\cdots5\quad\therefore\ n(A_{15})=13$

(A)

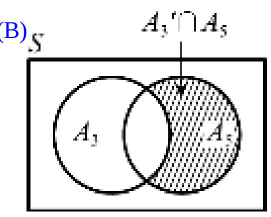


$n(A_3\cup A_5)=n(A_3)+n(A_5)-n(A_3\cap A_5)=n(A_3)+n(A_5)-n(A_{15})$

$=66+40-13=93$

所求$=\dfrac{n(A_3\cup A_5)}{n(S)}=\dfrac{93}{200}$

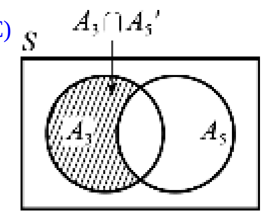
(B)



$n\left(A_3'\cap A_5\right)=n(A_5)-n(A_3\cap A_5)=n(A_5)-n(A_{15})=40-13=27$

所求$=\dfrac{n\left(A_3'\cap A_5\right)}{n(S)}=\dfrac{27}{200}$

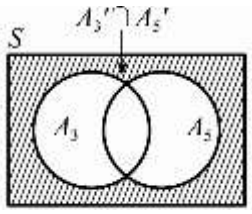
(C)



$n\left(A_3\cap A_5'\right)=n(A_3)-n(A_3\cap A_5)=n(A_3)-n(A_{15})=66-13=53$

所求$=\dfrac{n\left(A_3\cap A_5'\right)}{n(S)}=\dfrac{53}{200}$

(D)



$n\left(A_3'\cap A_5'\right)=n(S)-n\left(A_3\cup A_5\right)=200-93=107$

所求$=\dfrac{n\left(A_3'\cap A_5'\right)}{n(S)}=\dfrac{107}{200}$

(　　)25.設 a 、b 、c 三數成等比數列，且滿足 $a+b+c=9$ 及

$a^2+b^2+c^2=189$，則等比中項 $b=$　(A) -6　(B) -2　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) 6

【106 年歷屆試題.】

解答　A

解析　〈法一〉

$\because$　a 、b 、c 成等比數列

$\therefore$　$b^2=ac$

$a^2+b^2+c^2=189 \Rightarrow a^2+c^2=189-b^2$

$a+b+c=9 \Rightarrow a+c=9-b \Rightarrow (a+c)^2=(9-b)^2$

$\Rightarrow a^2+2ac+c^2=81-18b+b^2 \Rightarrow$

$\left(a^2+c^2\right)+2\,ac=81-18b+b^2$

$\Rightarrow \left(189-b^2\right)+2\,b^2=81-18b+b^2 \Rightarrow 18b=-108 \Rightarrow$

$b=-6$

〈法二〉

設等比數列 a 、b 、c 的公比為 r

則 $b=ar$，$c=ar^2$

$a+b+c=9$

$\Rightarrow a+ar+ar^2=9\cdots\cdots①$

$\Rightarrow a\left(1+r+r^2\right)=9\cdots\cdots②$

$a^2+b^2+c^2=189$

$\Rightarrow a^2+(ar)^2+\left(ar^2\right)^2=189 \Rightarrow a^2+a^2r^2+a^2r^4=189$

$\Rightarrow a^2\left(1+r^2+r^4\right)=189\cdots\cdots③$

$\dfrac{③}{②}$：$\dfrac{a^2\left(1+r^2+r^4\right)}{a\left(1+r+r^2\right)}=\dfrac{189}{9}$

$\Rightarrow \dfrac{a^2\left(1+r+r^2\right)\left(1-r+r^2\right)}{a\left(1+r+r^2\right)}=21 \Rightarrow a\left(1-r+r^2\right)=21$

$\Rightarrow a-ar+ar^2=21\cdots\cdots④$

①−④：$2ar=-12 \Rightarrow ar=-6$

$\because$　$b=ar$　$\therefore$　$b=-6$