0228 數學第三冊　姓名　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　)1.已知 $f(x)=3^x$，若 $f(a)=2$ 且 $f(b)=4$，則 $f(a+b)=$　(A)2　(B)4　(C)6　(D)8

【093 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$\because\ f(a)=2 \Rightarrow 3^a=2$

又 $f(b)=4 \Rightarrow 3^b=4$

$\therefore\ f(a+b)=3^{a+b}=3^a\times 3^b=2\times 4=8$

(　　)2.設 $a=\log_{10}2$，$b=\log_{10}3$，若以 a、b 表示 $\log_{10}15$，則 $\log_{10}15=$　(A)$a-b-1$　(B)$a+b-1$　(C)$-a+b+1$　(D)$a+b+1$

【092 年歷屆試題.】

解答　C

解析

$$\log_{10}15=\log_{10}\frac{3\times 10}{2}=\log_{10}3+\log_{10}10-\log_{10}2=b+1-a=-a+b+1$$

(　　)3.設 S 為一試驗之樣本空間，集合 A、B 皆為 S 中的事件，且 $P(A)$為事件 A 發生的機率。下列敘述何者<u>錯誤</u>？　(A)若 A 與 B 為互斥事件，則 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$恆成立　(B)$P(B-A)=P(B)-P(A)$恆成立　(C)$P(S-A)=1-P(A)$恆成立　(D)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$恆成立

【098 年歷屆試題】

解答　B

解析　(A)若 A 與 B 為互斥事件，則 $P(A\cap B)=0$

故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)$

(B)舉反例：

設 S 為擲一公正硬幣之樣本空間，A 為正面的事件，B 為反面的事件

則 $P(B-A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)-P(A)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$

$\Rightarrow\ P(B-A)\neq P(B)-P(A)$

故 $P(B-A)=P(B)-P(A)$不一定成立

(C)$P(S-A)=P(A')=1-P(A)$

(D)排容原理恆成立

(　　)4.設「 · 」表示四則運算中的乘號，若 $2^{2x+1}+2^{3x}=5\cdot 2^{x+4}$，試求 $x=$　(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

【094 年歷屆試題.】

解答　D (　　)6.中山高中一、二、三年級學生人數的比例分別為 40%、32%、28%，而一、二、三年級男生人數占該年級的比例分別為 50%、60%、40%，現從全校學生中任意選取 1 人，則此人為女生的機率為何？　(A)43.2%　(B)45.4%　(C)47.8%　(D)49.6%【099 年歷屆試題.】

解答　D　解析　原式 $\Rightarrow\ 2(2^x)^2+(2^x)^3=5\times 2^4\times 2^x$

$\because\ 2^x$ 恆為正數

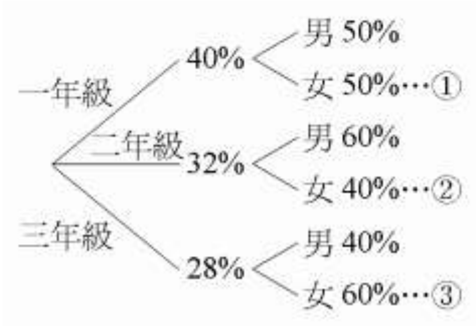
等號兩邊同除以 2^x，得 $2\times 2^x+(2^x)^2=80$

$\Rightarrow\ (2^x)^2+2\times 2^x-80=0 \Rightarrow (2^x+10)(2^x-8)=0$

$\Rightarrow\ 2^x=8$ 或 $2^x=-10$（不合）

$\therefore\ x=3$

(　　)5.有一籃球隊共有 12 位選手，其前鋒、中鋒、後衛的人數分別為 4 人、3 人、5 人，現在要選 5 位選手上場比賽，一般籃球比賽中，每隊的前鋒、中鋒、後衛人數分別為 2 人、1 人、2 人，問共有幾種不同選法？　(A)120　(B)154　(C)180　(D)225　解析　由題意，樹狀圖如下：



由①、②、③知所求機率

$=40\%\times 50\%+32\%\times 40\%+28\%\times 60\%=49.6\%$

故選(D)【099 年歷屆試題.】

解答　C

解析　$C^4_2\times C^3_1\times C^5_2=\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{3!}{1!2!}\times\dfrac{5!}{2!3!}=180$

故選(C)

(　　)7.若 $\log_3x+\log_3y=2$，則 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 之最小值為何？(A)0　(B)$\dfrac{1}{3}$　(C)$\dfrac{2}{3}$　(D)1

【095 年歷屆試題.】

解答　C

解析　$\log_3x+\log_3y=2 \Rightarrow \log_3xy=2 \Rightarrow xy=3^2=9$

又 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{xy}} \Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{9}}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 之最小值為 $\dfrac{2}{3}$

(　　)8.某遊樂場舉辦摸彩活動，摸彩箱中有 0 號球、1 號球、2 號球各 3 個，每一球被取出之機率均相同。遊客由摸彩箱中同時取出 3 球，若取出的 3 個球為 1 個 1 號球、2 個 0 號球時，則此遊客可以免費入場。求一遊客經由此摸彩活動得以免費入場的機率為何？　(A)$\dfrac{3}{560}$　(B)$\dfrac{3}{28}$　(C)$\dfrac{2}{9}$　(D)$\dfrac{1}{3}$

【100 年歷屆試題】

解答　B

解析　設 S 為由摸彩箱中 9 個球同時取 3 球的樣本空間，A 為取出 1 個 1 號球、2 個 0 號球的事件

則 $n(S)=\underbrace{C^9_3}_{9\text{ 個球取 3 個}}=\dfrac{9!}{3!6!}=84$

$n(A)=\underbrace{C^3_1}_{3\text{ 個 1 號球取 1 個}}\times\underbrace{C^3_2}_{3\text{ 個 0 號球取 2 個}}$

$=\dfrac{3!}{1!2!}\times\dfrac{3!}{2!1!}=9$

因此所求 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{9}{84}=\dfrac{3}{28}$

(　　) 9.設 r 為有理數，且 $5^r=4(\sqrt[3]{40}+\dfrac{\sqrt[3]{5}}{2})^2$，則 $r=$(A) $\dfrac{8}{3}$ (B) $\dfrac{10}{3}$ (C)8(D)10

【099 年歷屆試題.】

解答　A

解析

$$4(\sqrt[3]{40}+\frac{\sqrt[3]{5}}{2})^2=4(\sqrt[3]{8\times5}+\frac{\sqrt[3]{5}}{2})^2=4(2\sqrt[3]{5}+\frac{\sqrt[3]{5}}{2})^2=4(\frac{5\sqrt[3]{5}}{2})^2=4(\frac{5^{\frac{4}{3}}}{2})^2$$

$$=4\times\frac{5^{\frac{8}{3}}}{4}=5^{\frac{8}{3}}$$

$\therefore\ r=\dfrac{8}{3}$

故選(A)

(　　) 10.已知甲、乙、丙三人搭同一班次火車，此班火車有 5 節車廂。若每人選擇搭乘各車廂的機率均為 $\dfrac{1}{5}$，則此三人分別在不同車廂的機率為何？ (A) $\dfrac{1}{25}$ (B) $\dfrac{2}{25}$ (C) $\dfrac{12}{25}$ (D) $\dfrac{24}{25}$

【102 年歷屆試題】

解答　C

解析　設 S 為三人選擇車廂的樣本空間，A 為三人分別在不同車廂的事件，

則 $n(S)=5\times5\times5=125$

$n(A)=P^5_3=5\times4\times3=60$

所求 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{60}{125}=\dfrac{12}{25}$

(　　) 11.已知 $a>0$，$b>0$，$a\neq1$。若 $a^5=b^3$，則 $\log_a b=$(A) $-\dfrac{5}{3}$ (B) $-\dfrac{3}{5}$ (C) $\dfrac{3}{5}$ (D) $\dfrac{5}{3}$

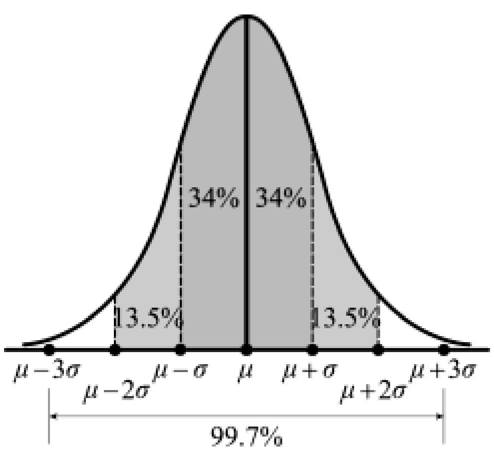
【102 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$a^5=b^3\ \Rightarrow\ a^{\frac{5}{3}}=b^{\frac{3}{3}}\ \Rightarrow\ a^{\frac{5}{3}}=b$

故 $\log_a b=\dfrac{5}{3}$

(　　) 12.某校全體新生測量身高結果近似常態分配，如圖。若身高的平均數 μ 為 170 公分，標準差 σ 為 4 公分，且全體新生中身高小於 166 公分的人數約為 120 人，則此校新生人數與下列何者最接近？



(A)375　(B)750　(C)1125　(D)1500

【102 年歷屆試題.】

解答　B

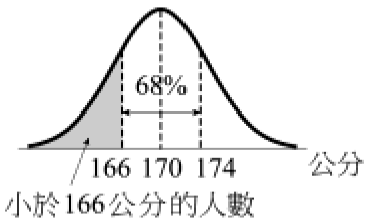
解析　設全校新生約有 x 人，

$\because\ 166=170-4=\mu-\sigma$　$\therefore$ 小於 166 公分的人數為 $\mu-\sigma$ 以下的人數

即 $x\times\dfrac{1}{2}\times(1-68\%)=\dfrac{16}{100}x$

則 $\dfrac{16}{100}x=120\ \Rightarrow\ x=750$

故新生約有 750 人



(　　) 13.設 $(x-2y)^4$ 與 $(x-2y)^5$ 的展開式中所有項的係數和分別為 a 、b，則 $\dfrac{b}{a}=$ (A) -2 (B) -1 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 2

【106 年歷屆試題.】

解答　B

解析　(1)令 $x=1$ 、$y=1$ 代入 $(x-2y)^4$：

$(1-2\times1)^4=(-1)^4=1$

則 $(x-2y)^4$ 的展開式中所有項係數和為 1

(2)令 $x=1$ 、$y=1$ 代入 $(x-2y)^5$：

$(1-2\times1)^5=(-1)^5=-1$

則 $(x-2y)^5$ 的展開式中所有項係數和為 -1

由(1)和(2)可知：$a=1$，$b=-1$

故 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{-1}{1}=-1$

(　　) 14.已知 33 位遊客在科學教育館參觀，他們的年齡及人數分布如表。若這群遊客年齡的中位數為 32 歲，則這群遊客中哪個年齡的人數最多？

年齡（歲）	8	12	32	54	60	62
人數（人）	7	a	1	b	5	1

(A) 8　(B) 12　(C) 54　(D) 60

【104 年歷屆試題.】

解答　C

解析　有 33 位遊客且其年齡的中位數為 32 歲

$\because$ 32 歲的遊客只有 1 位，而 $\dfrac{33-1}{2}=16$

$\therefore$ 小（大）於 32 歲的遊客均有 16 位

即 $7+a=16\ \Rightarrow\ a=9$

$b+5+1=16\ \Rightarrow\ b=10$

故 54 歲的人數最多

(　　) 15.設 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a=\dfrac{1}{70}$，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^b=\dfrac{1}{2500}$，$\left(\dfrac{1}{8}\right)^c=\dfrac{1}{216000}$，則 a 、b 、c 三個數的大小關係為何？ (A) $b<c<a$ (B) $c<b<a$ (C) $c<a<b$ (D) $a<b<c$

【103 年歷屆試題.】

解答 A

解析 $\because\ \left(\frac{1}{4}\right)^b=\frac{1}{2500}$

$\Rightarrow\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^b=\left(\frac{1}{50}\right)^2\ \Rightarrow\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)^b\right]^2=\left(\frac{1}{50}\right)^2$

$\therefore\ \left(\frac{1}{2}\right)^b=\frac{1}{50}\qquad \because\ \left(\frac{1}{8}\right)^c=\frac{1}{216000}$

$\Rightarrow\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^c=\left(\frac{1}{60}\right)^3\ \Rightarrow\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)^c\right]^3=\left(\frac{1}{60}\right)^3$

$\therefore\ \left(\frac{1}{2}\right)^c=\frac{1}{60}$

而 $\frac{1}{50}>\frac{1}{60}>\frac{1}{70}\ \Rightarrow\ \left(\frac{1}{2}\right)^b>\left(\frac{1}{2}\right)^c>\left(\frac{1}{2}\right)^a$

$\because\ y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 為遞減函數 $\quad\therefore\ b<c<a$

(　　)16.設 x、y 為正實數，若 $2\log(x-2y)=\log x+\log y$，則 $\frac{x}{y}$ 之值為何？ (A)1 (B)2 (C)3 (D)4

【098 年歷屆試題.】

解答 D

解析 $2\log(x-2y)=\log x+\log y$

$\Rightarrow\ \log(x-2y)^2=\log xy\ \Rightarrow\ (x-2y)^2=xy\ \Rightarrow\ x^2-5xy+4y^2=0$

$\Rightarrow\ (x-y)(x-4y)=0\ \Rightarrow\ x=y$ 或 $x=4y$

由題意知：x、y 為正實數

當 $x=y$ 時，$x-2y=-y<0$（不合，真數恆正）

$\therefore\ x=4y$，故 $\frac{x}{y}=\frac{4y}{y}=4$

(　　)17.設 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，$c=\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}}$，則 a、b、c 大小順序為何？

(A) $a>c>b$ (B) $a>b>c$ (C) $c>a>b$ (D) $b>c>a$

【106 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $a^6=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^6=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}\times 6}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

$b^6=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^6=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}\times 6}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

$c^2=\left[\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}}\right]^6=\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}\times 6}=\left(\frac{1}{6}\right)^1=\frac{1}{6}$

則 $b^6<a^6<c^6\ \Rightarrow\ b<a<c$

(　　)18.已知 m、n 為整數，若 $m\log_{500}5+n\log_{500}\sqrt{2}=1$，則 $m+n=$

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

【104 年歷屆試題.】

解答 A

解析 $m\log_{500}5+n\log_{500}\sqrt{2}=\log_{500}5^m+\log_{500}(2^{\frac{1}{2}})^n$

$=\log_{500}5^m+\log_{500}2^{\frac{n}{2}}=\log_{500}(5^m\times 2^{\frac{n}{2}})$

而 $1=\log_{500}500=\log_{500}(5^3\times 2^2)$，

則 $5^m\times 2^{\frac{n}{2}}=5^3\times 2^2\ \Rightarrow\ m=3$，$n=4$

故 $m+n=3+4=7$

(　　)19.從 1，2，3，4，5，6，7，8 這八個數字中，任取 3 個相異數字，若每個數字被取中的機會均相等，則取出之 3 個數字中，最大的數字大於 6 的機率為何？ (A) $\frac{5}{14}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{7}{12}$ (D) $\frac{9}{14}$

【104 年歷屆試題.】

解答 D

解析 設任取 3 個相異數字的樣本空間為 S

最大數字為 7 的事件為 A

最大數字為 8 的事件為 B

則 $n(S)=C^8_3=\frac{8\times 7\times 6}{3!}=56$

$n(A)=C^6_2=\frac{6\times 5}{2!}=15$

$n(B)=C^7_2=\frac{7\times 6}{2}=21$

所求 $=P(A)+P(B)=\frac{15}{56}+\frac{21}{56}=\frac{9}{14}$

〈另解〉

設任取 3 個相異數字的樣本空間為 S

而 3 個數字 ≤ 6 的事件為 A

$n(S)=C^8_3=\frac{8\times 7\times 6}{3!}=56$

$n(A)=C^6_3=\frac{6\times 5\times 4}{3!}=20$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}$

所求 $=P$(3個數字中，最大的數 >6)

$=1-P$(3個數字中，最大的數 ≤ 6)

$=1-P$(3個數字 ≤ 6)

$=1-P(A)=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$

(　　)20.將 6 顆相同紅球分給三個人且全部分完，若每人至少分到一顆紅球，則共有多少種分法？ (A) 6 (B) 10 (C) 20 (D) 27

【104 年歷屆試題.】

解答 B

解析 每一個人先給一顆紅球，

再將剩下的三顆紅球任意分給三人，

則方法數為 $H_3^3=C_3^{3+3-1}=C_3^5=\frac{5\times4\times3}{3!}=10$ 種

(　　) 21.已知四個正數 a、b、c、d 為一等比數列，若 $a+b=20$，$a+b+c+d=65$，則 $a=$ 　(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8

【104 年歷屆試題.】

解答　D

解析　設等比數列的公比為 r（$r>0$）

則 $b=ar$，$c=ar^2$，$d=ar^3$

$a+b=20 \Rightarrow a+ar=20$

$\Rightarrow a(1+r)=20\cdots\cdots①$

$\underline{a+b}+c+d=65 \Rightarrow \underline{20}+c+d=65$

$\Rightarrow c+d=45$

$\Rightarrow ar^2+ar^3=45$

$\Rightarrow ar^2(1+r)=45\cdots\cdots②$

$\frac{②}{①}$：$\frac{ar^2(1+r)}{a(1+r)}=\frac{45}{20} \Rightarrow r^2=\frac{9}{4}$

$\Rightarrow r=\pm\frac{3}{2}$（負不合）

$r=\frac{3}{2}$ 代回①：$a(1+\frac{3}{2})=20 \Rightarrow a=8$

(　　) 22.若同時擲兩粒公正的骰子，則下列何者正確？　(A)點數和等於 5 的機率大於點數和等於 8 的機率　(B)點數和等於 6 的機率大於點數和等於 7 的機率　(C)點數和等於 7 的機率大於點數和等於 9 的機率　(D)點數和等於 9 的機率大於點數和等於 8 的機率

【105 年歷屆試題.】

解答　C

解析　設同時擲兩粒骰子的樣本空間為 S，點數和等於 k 的機率為 P_k

（如：P_5 為點數和等於 5 的機率）

$n(S)=6\times6=36$

擲兩粒骰子：

點數和	5	6	7	8	9
方法數	4	5	6	5	4

則 $P_5=\frac{4}{36}$，$P_6=\frac{5}{36}$，$P_7=\frac{6}{36}$，$P_8=\frac{5}{36}$，$P_9=\frac{4}{36}$

(A) $P_5<P_8$　(B) $P_6<P_7$　(C) $P_7>P_9$　(D) $P_9<P_8$

(　　) 23.連續投擲一公正硬幣四次，觀察其出現正反面的情形。已知 E 為第二次投擲出現正面的事件，F 為第三次投擲出現正面的事件，G 為四次投擲中至少出現兩次正面的事件。若 $P(A)$ 表示事件 A 發生的機率，則下列敘述何者正確？

(A) $P(E)=\frac{1}{8}$　(B) $P(E\cap G')=\frac{1}{8}$　(C) $P(F|E)=\frac{1}{4}$　(D) $P(G)=\frac{11}{16}$

【105 年歷屆試題.】

解答　D

解析　設樣本空間為 S，則 $n(S)=2^4=16$

(A) E：第二次出現正面的事件

◯ 正 ◯ ◯

$n(E)=2^3=8$

則 $P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

(B) ∵ G 表示至少出現兩次正面的事件

∴ G' 表示只有一次正面或沒有正面的事件

$\Rightarrow$ $E\cap G'$：只有第二次出現正面，其餘皆為反面的事件

反 正 反 反

$n(E\cap G')=1$

則 $P(E\cap G')=\frac{n(E\cap G')}{n(S)}=\frac{1}{16}$

(C) F：第三次出現正面的事件

$\Rightarrow$ $F\cap E$：第二、三次均出現正面的事件

◯ 正 正 ◯

$n(F\cap E)=2^2=4$

則 $P(F|E)=\frac{n(F\cap E)}{n(E)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

(D)設 G_0 為沒有出現正面的事件，

反 反 反 反

$n(G_0)=1$，則 $P(G_0)=\frac{n(G_0)}{n(S)}=\frac{1}{16}$

設 G_1 為出現一次正面的事件，

正 反 反 反，反 正 反 反

反 反 正 反，反 反 反 正

$n(G_1)=4$，則 $P(G_1)=\frac{n(G_1)}{n(S)}=\frac{4}{16}$

則 $P(G)=1-P(G')=1-P(G_0)-P(G_1)=1-\frac{1}{16}-\frac{4}{16}=\frac{11}{16}$

(　　) 24.設 a、b、c 三數成等比數列，且滿足 $a+b+c=9$ 及 $a^2+b^2+c^2=189$，則等比中項 $b=$ 　(A) -6　(B) -2　(C) $\frac{1}{2}$　(D) 6

【106 年歷屆試題.】

解答　A

解析　〈法一〉

∵ a、b、c 成等比數列

∴ $b^2=ac$

$a^2+b^2+c^2=189 \Rightarrow a^2+c^2=189-b^2$

$a+b+c=9 \Rightarrow a+c=9-b \Rightarrow (a+c)^2=(9-b)^2$

$\Rightarrow a^2+2ac+c^2=81-18b+b^2 \Rightarrow \underline{(a^2+c^2)}+2\,\underline{ac}=81-18b+b^2$

$\Rightarrow \underline{(189-b^2)}+2\,\underline{b^2}=81-18b+b^2 \Rightarrow 18b=-108 \Rightarrow b=-6$

〈法二〉

設等比數列 a、b、c 的公比為 r

則 $b=ar$，$c=ar^2$

$a+b+c=9$

$\Rightarrow a+ar+ar^2=9\cdots\cdots①$

$\Rightarrow a(1+r+r^2)=9\cdots\cdots②$

$a^2+b^2+c^2=189$

$\Rightarrow$ $a^2+(ar)^2+(ar^2)^2=189$ $\Rightarrow$ $a^2+a^2r^2+a^2r^4=189$

$\Rightarrow$ $a^2(1+r^2+r^4)=189\cdots\cdots$③

$\frac{③}{②}$：$\frac{a^2(1+r^2+r^4)}{a(1+r+r^2)}=\frac{189}{9}$

$\Rightarrow$ $\frac{a^2(1+r+r^2)(1-r+r^2)}{a(1+r+r^2)}=21$ $\Rightarrow$ $a(1-r+r^2)=21$

$\Rightarrow$ $a-ar+ar^2=21\cdots\cdots$④

①−④：$2ar=-12$ $\Rightarrow$ $ar=-6$

$\because$ $b=ar$ $\therefore$ $b=-6$

(　　)25.將0、1、2、3、5五個數字全取，排成一列，可得4的倍數的五位數共有多少個？(註：凡是末兩位數是4的倍數者即為4的倍數) (A)18 (B)20 (C)24 (D)36

【103年歷屆試題.】

解答 A

解析 末兩位數是4的倍數為12、20、32、52

(1)□□□12：

把0、3、5排入前三位，因為0不可排首位，所以先排0在首位之外的位置，再排3、5，

有$2\times 2!=4$種

(2)□□□20：

把1、3、5排入前三位，

有$3!=6$種

(3)□□□32：

把0、1、5排入前三位，因為0不可排首位，所以先排0在首位之外的位置，再排1、5，

有$2\times 2!=4$種

(4)□□□52：

把0、1、3排入前三位，因為0不可排首位，所以先排0在首位之外的位置，再排1、3，

有$2\times 2!=4$種

由(1)、(2)、(3)、(4)可知，

共有$4+6+4+4=18$種