0227 數學第二冊　姓名　　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　　) 1.在 $x\geq 0$，$y\geq 1$，$x+y\leq 2$ 的條件下，$2x-y$ 的最大值為何？　(A) -2　(B) -1　(C)1　(D)2

【101 年歷屆試題.】

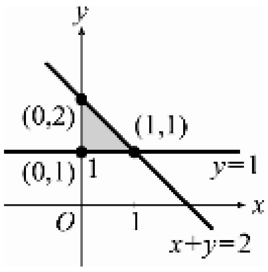
解答　C

解析　滿足不等式條件的圖解如下：

其頂點為(0 , 1)、(1 , 1)、(0 , 2)，而

(x,y)	(0,1)	(1,1)	(0,2)
$2x-y$	-1	1	-2

故 $2x-y$ 的最大值為 1



(　　　) 2.若 $3x^2+2x+k=0$ 有兩相等實根，則 $k=$　(A)$\frac{1}{3}$　(B)$\frac{1}{2}$　(C)1　(D)$\frac{4}{3}$

【092 年歷屆試題.】

解答　A

解析　$\because$　$3x^2+2x+k=0$ 有兩相等實根　$\Rightarrow$　$2^2-4\times 3\times k=$　　$k=\frac{1}{3}$

(　　　) 3.若 α、β 均為實數，且 $\alpha^3=2+\sqrt{5}$，$\beta^3=2-\sqrt{5}$，則 $\alpha+\beta=$　(A) -1　(B)1　(C)2　(D)4

【098 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$\alpha^3\beta^3=(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=2^2-(\sqrt{5})^2=-1$　$\Rightarrow$　$\alpha\beta=-1$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$

$=(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-\alpha\beta]=(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta]$

$=(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2-3\times(-1)]=(\alpha+\beta)^3+3(\alpha+\beta)$

設 $\alpha+\beta=x$，則 $\alpha^3+\beta^3=x^3+3x$，而 $\alpha^3+\beta^3=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$

因此 $x^3+3x=4$　$\Rightarrow$　$x^3+3x-4=0$　$\Rightarrow$　$(x-1)(x^2+x+4)=0$

$\Rightarrow$　$x-1=0$ 或 $x^2+x+4=0$

而 $x^2+x+4=0$ 無實數解

故 $x=1$，即 $\alpha+\beta=1$

(　　　) 4.設 x、y、k 均為實數，若 $|x+1|+|2x-y+4|+|x+3y+k|=0$，則 k 之值為何？　(A)3　(B)1　(C) -4　(D) -5

【103 年歷屆試題.】

解答　D

解析　從題意可知

$$\begin{cases} x+1=0\cdots\cdots① \\ 2x-y+4=0\cdots\cdots② \\ x+3y+k=0\cdots\cdots③ \end{cases}$$

由①得 $x=-1$

$x=-1$ 代入②得 $2(-1)-y+4=0$　$\Rightarrow$　$y=2$

$x=-1$、$y=2$ 代入③得 $-1+3\times 2+k=0$　$\Rightarrow$　$k=-5$

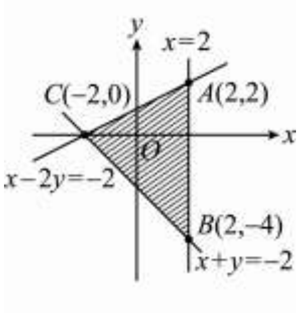
(　　　) 5.在坐標平面上，滿足 $x+y\geq -2$，$x-2y\geq -2$，$x\leq 2$ 不等式組的區域面積為何？　(A)12　(B)20　(C)24　(D)28

【093 年歷屆試題.】

解答　A

解析 $\begin{cases} x+y\ge -2 \\ x-2y\ge -2 \\ x\le 2 \end{cases}$

所成區域為△ABC（如下圖所示）



所求面積（即△ABC 面積）$=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times$（$\overline{AB}$ 邊上的高）$=\dfrac{1}{2}\times 6\times 4=12$

(　　　) 6.若 α、β 為方程式 $x-\dfrac{3}{x}=-1$ 的兩相異實根，則 $(\dfrac{2}{\alpha}+1)(\dfrac{2}{\beta}+1)=$ (A) -1 (B) $\dfrac{1}{3}$ (C)1 (D) $\dfrac{5}{3}$

【100 年歷屆試題.】

解答 B

解析 $x-\dfrac{3}{x}=-1$

左右同乘 x

$\Rightarrow\ x^2-3=-x\ \Rightarrow\ x^2+x-3=0\ \Rightarrow\ \alpha+\beta=-\dfrac{1}{1}=-1$，$\alpha\beta=\dfrac{-3}{1}=-3$

$$(\frac{2}{\alpha}+1)(\frac{2}{\beta}+1)=\frac{4}{\alpha\beta}+\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+1=\frac{4}{\alpha\beta}+2(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})+1=\frac{4}{\alpha\beta}+2\times\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+1$$

$$=\frac{4}{-3}+2\times\frac{-1}{-3}+1=\frac{1}{3}$$

(　　　) 7.設 k 為自然數，若行列式 $\begin{vmatrix} 1-k & 2 & 3 \\ 1 & 2-k & 3 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix}=0$，則 $k=$ (A)3 (B)4 (C)5 (D)6

【094 年歷屆試題.】

解答 D

解析

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 & 3 \\ 1 & 2-k & 3 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix} 6-k & 2 & 3 \\ 6-k & 2-k & 3 \\ 6-k & 2 & 3-k \end{vmatrix}=0$$

×1

×1

$$\Rightarrow\ (6-k)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-k & 3 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix}\ \times(-1)\ \times(-1)\ =0$$

$$\Rightarrow\ (6-k)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ (6-k)k^2=0$$

但已知 k 為自然數

$\therefore\ k=6$

(　　　) 8.設 $i=\sqrt{-1}$ 且 a 與 b 為兩實數，若 $(a+bi)(1+3i)=8+4i$，則 $(a+bi)^2=$ (A) $8i$ (B) $-8i$ (C) $8+8i$ (D) $8-8i$

【094 年歷屆試題.】

解答 B

解析 $\because\ (a+bi)(1+3i)=8+4i$

$$\Rightarrow\ a+bi=\frac{8+4i}{1+3i}=\frac{(8+4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{20-20i}{10}=2-2i$$

$\therefore\ (a+bi)^2=(2-2i)^2=4-8i+4i^2=-8i$

(　　) 9.設 a、b、c 為實數，若 $\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{vmatrix}=12$ 且 $\begin{vmatrix}1 & a & a^3\\1 & b & b^3\\1 & c & c^3\end{vmatrix}=156$，則 $\begin{vmatrix}1 & a+1 & a^2(a+1)\\1 & b+1 & b^2(b+1)\\1 & c+1 & c^2(c+1)\end{vmatrix}=$ (A)13 (B)144 (C)168 (D)1872

【095 年歷屆試題.】

解答 C

解析

$$\begin{vmatrix}1 & a+1 & a^2(a+1)\\1 & b+1 & b^2(b+1)\\1 & c+1 & c^2(c+1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a^3+a^2\\1 & b & b^3+b^2\\1 & c & c^3+c^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a^3\\1 & b & b^3\\1 & c & c^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{vmatrix}=156+12=168$$

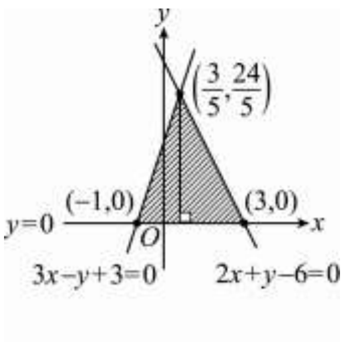
$\times(-1)$

(　　) 10.在坐標平面上，滿足不等式方程組 $\begin{cases}2x+y-6\le 0\\3x-y+3\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$ 的區域，其面積為何？ (A)$\frac{22}{5}$ (B)$\frac{32}{5}$ (C)$\frac{42}{5}$ (D)$\frac{48}{5}$

【098 年歷屆試題.】

解答 D

解析 滿足不等式方程組的區域如圖所示：



面積 $=\frac{1}{2}\times[3-(-1)]\times\frac{24}{5}=\frac{48}{5}$

(　　) 11.設 $i=\sqrt{-1}$，試求 $(-i)^8+(-i)^7-(-i)^6+(-i)^5+(-i)^4-(-i)^3-(-i)^2+(-i)+1=$ (A)$2-5i$ (B)$2+5i$ (C)$-5+2i$ (D)$5-2i$

【097 年歷屆試題.】

解答 D

解析 $(-i)^2=i^2=-1$；$(-i)^3=-i^3=-i^2\times i=-(-1)\times i=i$；$(-i)^4=i^4=1$

$(-i)^5=-i^5=-i^4\times i=(-1)\times i=-i$；$(-i)^6=i^6=i^4\times i^2=1\times(-1)=-1$

$(-i)^7=-i^7=-i^4\times i^3=-1\times(-i)=i$；$(-i)^8=i^8=i^4\times i^4=1\times 1=1$

$\therefore\ (-i)^8+(-i)^7-(-i)^6+(-i)^5+(-i)^4-(-i)^3-(-i)^2+(-i)+1$

$=1+i-(-1)+(-i)+1-i-(-1)-i+1$

$=1+i+1-i+1-i+1-i+1=5-2i$

(　　) 12.行列式 $\begin{vmatrix}1 & 10 & 20\\5 & 50 & 1\\10 & 1 & 5\end{vmatrix}=$ (A)-99^2 (B)-100^2 (C)99^2 (D)100^2

【097 年歷屆試題.】

解答 A

解析

$$\begin{vmatrix}1&10&20\\5&50&1\\10&1&5\end{vmatrix}\begin{matrix}\times(-5)\\ \times(-10)\end{matrix}=\begin{vmatrix}1&10&20\\0&0&-99\\0&-99&-195\end{vmatrix}$$（依第一行降階）

$$=1\times\begin{vmatrix}0&-99\\-99&-195\end{vmatrix}=-99^2$$

(　　) 13.已知 $f(x)$為一實係數多項式，且 $f(\frac{3}{2})=27$ ， $f(\frac{-5}{3})=8$ 。若 $f(x)$除以 $6x^2+x-15$ 的餘式為 $ax+b$，則 $a+b=$ (A)4 (B)6 (C)18 (D)24

【100 年歷屆試題.】

解答 D

解析 設 $f(x)\div(6x^2+x-15)=q(x)\cdots ax+b$

$\Rightarrow\ f(x)=(6x^2+x-15)q(x)+ax+b=(2x-3)(3x+5)q(x)+ax+b$

$\because\ f(\frac{3}{2})=27$ ， $f(-\frac{5}{3})=8$

$\therefore\ \frac{3}{2}a+b=27$ ， $-\frac{5}{3}a+b=8\ \Rightarrow\ a=6$，$b=18$

因此 $a+b=6+18=24$

(　　) 14.若 x^2+x+1 為 x^3+ax^2+bx+2 的因式，則下列何者正確？ (A)$a>b$ (B)$a^2+b^2=10$ (C)$a-b=-2$ (D)$a+b=6$

【101 年歷屆試題.】

解答 D

解析 先以 x^2+x+1 去除 x^3+ax^2+bx+2：

$$\begin{array}{r|l} & 1+(a-1)\\ \hline 1+1+1 & 1\ +\ a\ +\ b\ +\ 2\\ & 1\ +\ 1\ +\ 1\\ \hline & (a-1)+(b-1)+\ 2\\ & (a-1)+(a-1)+(a-1)\\ \hline & (b-a)+(3-a)\end{array}$$

餘式為$(b-a)x+(3-a)$

$\because\ x^2+x+1$ 為 x^3+ax^2+bx+2 的因式 $\therefore$ 餘式為 0

即 $b-a=0$ 且 $3-a=0\ \Rightarrow\ a=3$，$b=3$

(A) $a=b$

(B) $a^2+b^2=3^2+3^2=18$

(C) $a-b=3-3=0$

(D) $a+b=3+3=6$

(　　) 15.已知 m、n 為實數，$Q(x)$為二次多項式。若 $x^4-mx^3-x^2-5x+n=(x^2-3x+2)Q(x)$，則 $2m+n=$ (A)-6 (B)-2 (C)4 (D)8

【102 年歷屆試題.】

解答 D

解析 令 $f(x)=x^4-mx^3-x^2-5x+n$

$\because\ f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)=(x-1)(x-2)Q(x)$

$\therefore\ x-1$ 與 $x-2$ 均為 $f(x)$的因式

$\Rightarrow\ f(1)=0$，$f(2)=0$

$f(1)=1-m-1-5+n=0\ \Rightarrow\ -m+n=5\cdots\cdots$①

$f(2)=16-8m-4-10+n=0\ \Rightarrow\ -8m+n=-2\cdots\cdots$②

① − ② $7m=7\ \Rightarrow\ m=1$

$m=1$ 代入① $-1+n=5\ \Rightarrow\ n=6$

故 $2m+n=2\times1+6=8$

(　　　) 16.已知 $i=\sqrt{-1}$ ，且 a、b 均為實數。若 $1-\sqrt{3}i$ 為方程式 $x^3+3x^2+ax+b=0$ 的一根，則 $a+b=$ 　(A) -4　(B) -2　(C)8　(D)14

【098 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$1-\sqrt{3}i$ 為 $x^3+3x^2+ax+b=0$ 的一根，且 a、b 均為實數

$\Rightarrow$ 　$1+\sqrt{3}i$ 也是 $x^3+3x^2+ax+b=0$ 的根

而 $[x-(1-\sqrt{3}i)][x-(1+\sqrt{3}i)]=x^2-2x+4$

則 $x^3+3x^2+ax+b=(x^2-2x+4)(x+\frac{b}{4})=x^3+(-2+\frac{b}{4})x^2+(4-\frac{b}{2})x+b$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2+\frac{b}{4}=3 \\ 4-\frac{b}{2}=a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b=20，a=-6$$

故 $a+b=-6+20=14$

《另解》

$1-\sqrt{3}i$ 為實係數方程式，$x^3+3x^2+ax+b=0$ 之一根，則 $1+\sqrt{3}i$ 為其另一根

設 α 為方程式的第三根

則三根和 $(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)+\alpha=-\frac{3}{1}=-3$ 　$\Rightarrow$ 　$\alpha=-5$

$\therefore$ 　$x^3+3x^2+ax+b=[x-(1-\sqrt{3}i)][x-(1+\sqrt{3}i)][x-(-5)]$

$=x^3+3x^2-6x+20$

$\Rightarrow$ 　$a=-6$，$b=20$

故 $a+b=-6+20=14$

(　　　) 17.已知 $i=\sqrt{-1}$ ，a 為複數，若二次方程式 $x^2-ax-4+7i=0$ 有一根為 $2-i$，則另一根為何？　(A) $2-3i$　(B) $-3+2i$　(C) $2+i$　(D) $2+3i$

【092 年歷屆試題.】

解答　B

解析　設另一根為 α，則 $\alpha(2-i)=-4+7i$

$$\Rightarrow \quad \alpha=\frac{-4+7i}{2-i}=\frac{(-4+7i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{-15+10i}{5}=-3+2i$$

$\therefore$ 　另一根為 $-3+2i$

《註》本題並非實係數二次方程式，故兩根不一定共軛存在

(　　　) 18.設 a 、b 、c 均為實數，若 $(a-b)(b-c)(c-a)=-2$ ，則 $\begin{vmatrix} 2a & b & b \\ 6c & 3c & 3b \\ 2c-2a & c-a & c-a \end{vmatrix}$ 之值為何？　(A) -12　(B) -6　(C) 6　(D) 12

【105 年歷屆試題.】

解答　D

解析　原式 $=\begin{vmatrix} 2a & b & b \\ 2\times3\times c & 3c & 3b \\ 2(c-a) & c-a & c-a \end{vmatrix}$（第一行提出 2 ，第二列提出 3 ，第三列提出 $(c-a)$ ）

$\times(-1)$　$\times(-1)$

$$=2\times3\times(c-a)\times\begin{vmatrix} a & b & b \\ c & c & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=6(c-a)\times\begin{vmatrix} a & b-a & b-a \\ c & 0 & b-c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ （第三列降階展開）

$=6(c-a)\times 1\times\begin{vmatrix} b-a & b-a \\ 0 & b-c \end{vmatrix}$（第一列提出$(b-a)$）

$=6(c-a)\times(b-a)\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-c \end{vmatrix}$

$=6(c-a)(b-a)\times[1\times(b-c)-0\times 1]$

$=6(c-a)(b-a)(b-c)=6(c-a)[-(a-b)](b-c)$

$=-6(a-b)(b-c)(c-a)=-6\times(-2)=12$

(　　) 19.若 ω 為方程式 $x^2+x+1=0$ 之一複數根，則 $\omega^{2005}=$　(A) -1　(B)1　(C) $-\omega$　(D)ω

【094 年歷屆試題.】

解答　D

解析　$\because$　ω 為 $x^2+x+1=0$ 之一複數根

$\Rightarrow$　$\omega^2+\omega+1=0$　$\Rightarrow$　$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\Rightarrow$　$\omega^3-1=0$，即 $\omega^3=1$

$\therefore$　$\omega^{2005}=(\omega^3)^{668}\times\omega=1^{668}\times\omega=\omega$

(　　) 20.已知 $i=\sqrt{-1}$，則下列何者為複數 $4+4\sqrt{3}i$ 的一個平方根？　(A) $\sqrt{6}-\sqrt{2}i$　(B) $\sqrt{6}+\sqrt{2}i$　(C) $-\sqrt{6}+\sqrt{2}i$　(D) $\sqrt{3}+\sqrt{2}i$

【093 年歷屆試題.】

解答　B

解析　$4+4\sqrt{3}i=8(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=8(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$　$\Rightarrow$　$4+4\sqrt{3}i$ 的平方根為

$z_k=\sqrt{8}(\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{2}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{2})$（其中 $k=0,1$）

即 $z_0=\sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=\sqrt{6}+\sqrt{2}i$

$z_1=\sqrt{8}(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi)=2\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)=-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

$\therefore$　$4+4\sqrt{3}i$ 的平方根為 $\sqrt{6}+\sqrt{2}i$ 及 $-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

(　　) 21.已知 $i=\sqrt{-1}$，則 $(\sqrt{3}+i)^{10}=$　(A) $2^9(1+\sqrt{3}i)$　(B) $2^9(1-\sqrt{3}i)$　(C) $2^9(\sqrt{3}+i)$　(D) $2^9(\sqrt{3}-i)$

【091 年歷屆試題.】

解答　B

解析　由題目中

(1)先求 $\sqrt{3}+i$ 的極式

(2)再用(1)求 $(\sqrt{3}+i)^{10}$

(1) $\sqrt{3}+i=2(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\times\frac{1}{2})=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$

其中 $2=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=|z|$

(2) $(\sqrt{3}+i)^{10}=[2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)]^{10}=2^{10}(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)$

$=1024[\cos 60^\circ+i(-\sin 60^\circ)]=1024(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$=512(1-\sqrt{3}i)=2^9(1-\sqrt{3}i)$

(　　) 22.設 $z_1=\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)^4$，$z_2=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2$，則 $\frac{z_1}{z_2}$ 之值為何？　(A) -1　(B) i　(C) 0　(D) 1

【103 年歷屆試題.】

解答　D

解析 $z_1=\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)^4=\cos\left(4\times\frac{5}{3}\pi\right)+i\sin\left(4\times\frac{5}{3}\pi\right)=\cos\frac{20}{3}\pi+i\sin\frac{20}{3}\pi$

$=\cos\left(3\times2\pi+\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(3\times2\pi+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

$z_2=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2=\cos\left(2\times\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

$\because\ z_1=z_2\quad\therefore\ \frac{z_1}{z_2}=1$

(　　)23.下列何者與不等式$|x-4|<8$的解相同？　(A)$(x+4)(x-12)>0$　(B)$(x-4)(x+12)>0$　(C)$(x+4)(x-12)<0$　(D)$(x-4)(x+12)<0$

【095 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $|x-4|<8\ \Rightarrow\ -8<x-4<8\ \Rightarrow\ -4<x<12\ \Rightarrow\ (x+4)(x-12)<0$

$\therefore$ $|x-4|<8$ 與$(x+4)(x-12)<0$ 的解相同

(　　)24.已知$i=\sqrt{-1}$且a、b為實數，若$(2+i)(a+bi)=15+5i$，則$a+b=$　(A)4　(B)6　(C)8　(D)10

【104 年歷屆試題.】

解答 B

解析 $(2+i)(a+bi)=15+5i$

$\Rightarrow\ a+bi=\frac{15+5i}{2+i}=\frac{5(3+i)}{2+i}=\frac{5(3+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$

$=\frac{5(6-3i+2i-i^2)}{2^2+1^2}=\frac{5(7-i)}{5}=7-i$

則$a=7$，$b=-1$，故$a+b=7+(-1)=6$

(　　)25.下列何者為不等式$3x^2-3x\le 6$之解？　(A)$x\le-2$或$x\ge1$　(B)$-2\le x\le1$　(C)$-1\le x\le2$　(D)$x\le-1$或$x\ge2$

【101 年歷屆試題.】

解答 C

解析 $3x^2-3x\le6\ \Rightarrow\ 3x^2-3x-6\le0\ \overset{\div3}{\Rightarrow}\ x^2-x-2\le0$

$\Rightarrow\ (x+1)(x-2)\le0\ \Rightarrow\ -1\le x\le2$