0216 圓方程式

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　) 1.試問在坐標平面上，斜率為 $\frac{1}{2}$ 且通過 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 之圓心的直線方程式為何？ (A)$x-2y+5=0$ (B)$2x-y+5=0$ (C)$x+2y+5=0$ (D)$2x+y+5=0$

【096 年歷屆試題.】

解答 A

解析 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 的圓心為 $(-\frac{2}{2},-\frac{-4}{2})=(-1,2)$

$\because$ 直線斜率為 $\frac{1}{2}$，且通過圓心$(-1,2)$

$\Rightarrow$ $y-2=\frac{1}{2}(x+1)$ $\Rightarrow$ $2y-4=x+1$ $\Rightarrow$ $x-2y+5=0$

$\therefore$ 所求直線方程式為 $x-2y+5=0$

(　　)2.若圓 C 的方程式為 $x^2+y^2-6x-4y+4=0$，則下列各方程式的圖形，何者與圓 C 相切？ (A)$3x+4y-1=0$ (B)$3x+4y-2=0$ (C)$3x+4y-7=0$ (D)$3x+4y-14=0$

【098 年歷屆試題】

解答 B

解析 圓 C：$x^2+y^2-6x-4y+4=0$

圓心 $O(-\frac{-6}{2},-\frac{-4}{2})=(3,2)$，半徑 $r=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(-4)^2-4\times 4}=3$

(A) $d=\frac{|3\times 3+4\times 2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}>r$

(B) $d=\frac{|3\times 3+4\times 2-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=r$

(C) $d=\frac{|3\times 3+4\times 2-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}<r$

(D) $d=\frac{|3\times 3+4\times 2-14|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5}<r$

故(B)$3x+4y-2=0$ 與圓 C 相切

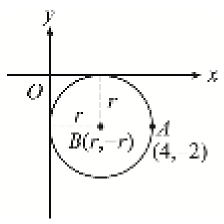
(　　) 3.一圓通過 $A(4,-2)$ 且與 x、y 軸均相切，則此圓的半徑為 (A)4 或 10 (B)2 或 10 (C)4 或 8 (D)2 或 8

【隨堂講義補充題.】

解答 B

解析 $r=\overline{BA}=\sqrt{(r-4)^2+(-r-(-2))^2}$ $\Rightarrow$ $r^2=(r^2-8r+16)+(r^2-4r+4)$

$\Rightarrow$ $r^2-12r+20=0$ $\Rightarrow$ $(r-2)(r-10)=0$ $\Rightarrow$ $r=2$ 或 10



(　　) 4.已知一圓半徑為 r 且圓心在 $(4,4)$。若該圓與直線 $x+y=0$ 有二交點，則下列何者可為 r 之值？ (A)3 (B)4 (C)5 (D)6

【隨堂測驗.】

解答 D

解析 設圓心 $(4,4)$ 到直線 $x+y=0$ 的距離為 d，

則 $d=\frac{|4+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\sqrt{2}$

$\because$　圓與 $x+y=0$ 有二交點　$\therefore$　$r>d$

則 $r>4\sqrt{2}\doteqdot 5.657$，故選(D)

(　　)5.圓心 $(0,-4)$ 且與 $x+y=0$ 相切的圓方程式為　(A)$x^2+y^2=8$　(B)$x^2+(y+4)^2=2$　(C)$x^2+(y+4)^2=8$　(D)$x^2+(y+4)^2=4$　(E)$x^2+(y+4)^2=16$

【課本練習題-自我評量.】

解答　C

解析　圓心 $(0,-4)$ 到切線 $x+y=0$ 的距離為半徑 r

$\therefore$　$r=\dfrac{|0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

故圓方程式為 $x^2+(y+4)^2=8$

(　　) 6.點 $P(-6,2)$ 到圓 C ：$(x-1)^2+(y-2)^2=9$ 上的任一點的最遠距離為　(A)10　(B)8　(C)6　(D)4

【隨堂測驗.】

解答　A

解析　圓 C 的圓心為 $O(1,2)$ ，半徑為 3

$\overline{OP}=\sqrt{[1-(-6)]^2+(2-2)^2}=7>$ 半徑

則點 P 到圓 C 上的點之最遠距離為 $7+3=10$

(　　) 7.設 $x^2+y^2=100$，則 $3x+4y$ 的最大值為　(A)2500　(B)500　(C)50　(D)25　(E)10

【課本練習題-自我評量.】

解答　C

解析　圓 $x^2+y^2=100$ 的參數式為 $\begin{cases}x=10\cos\theta\\ y=10\sin\theta\end{cases}$　$0\le\theta<2\pi$

$3x+4y=3\times10\cos\theta+4\times10\sin\theta=30\cos\theta+40\sin\theta$

$\because$　$-\sqrt{30^2+40^2}\le 30\cos\theta+40\sin\theta\le\sqrt{30^2+40^2}$

$\therefore$　$-50\le 30\cos\theta+40\sin\theta\le 50$

故 $3x+4y$ 的最大值為 50

(　　)8.若方程式 $x^2+y^2-2x+ky+2k-2=0$ 的圖形不存在，則 k 的範圍為　(A)$2<k<6$　(B)$-6<k<-2$　(C)$k<2$ 或 $k>6$　(D)$k<-6$ 或 $k>-2$

【隨堂講義補充題.】

解答　A

解析　$\left(x^2-2x\right)+\left(y^2+ky\right)+2k-2=0$

$\Rightarrow$　$\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2+ky+\dfrac{k^2}{4}\right)+2k-2-1-\dfrac{k^2}{4}=0$

$\Rightarrow$　$(x-1)^2+\left(y+\dfrac{k}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(k^2-8k+12\right)$

$\therefore$　$k^2-8k+12<0$　$\Rightarrow$　$(k-2)(k-6)<0$　$\Rightarrow$　$2<k<6$

(　　) 9.與直線 $y=2x$ 平行，且與圓 $x^2+y^2=9$ 相切的直線方程式為　(A)$y=2x+9$　(B)$y=2x\pm3$　(C) $y+2x\pm3\sqrt{5}=0$　(D) $2x-y\pm3\sqrt{5}=0$　(E) $y=2x\pm\sqrt{5}$

【課本練習題-自我評量.】

解答　D

解析　圓的切線與直線 $y=2x$ 平行

故設切線為 $y=2x+k$

圓心(0,0)到切線的距離為半徑長 3

$\Rightarrow$　$\dfrac{|0-0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=3$　$\Rightarrow$　$|k|=3\sqrt{5}$　$\Rightarrow$　$k=\pm3\sqrt{5}$

切線方程式為 $y=2x\pm 3\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ $2x-y\pm 3\sqrt{5}=0$

(　　) 10.設 x 、 y 為實數且滿足 $x^2+y^2=4$，則 $4x-3y+2$ 的最大值為 (A)6 (B)8 (C)10 (D)12

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 $x^2+y^2=4$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$

$\therefore$ $4x-3y+2=8\cos\theta-6\sin\theta+2$

$\Rightarrow$ $4x-3y+2$ 的最大值 $=\sqrt{8^2+(-6)^2}+2=12$

(　　) 11.過 $P(-3,0)$ 且與 $x^2+y^2=9$ 相切的直線方程式為 (A) $x+y=3$ (B) $y=-3$ (C) $x+3=0$ (D) $y=3$ (E) $x-y+3=0$

【課本練習題-自我評量.】

解答 C

解析 將 $P(-3,0)$ 代入圓方程式得 $(-3)^2+0^2=9$

$\because$ $P(-3,0)$ 在圓上，即 P 點為切點

又 $P(-3,0)$ 在 x 軸上，所以切線垂直 x 軸

故切線為 $x+3=0$

(　　) 12.若方程式 $x^2+y^2+2kx-6y+(k^2+k+1)=0$ 的圖形為一點，則此點坐標為 (A)(4 , 3) (B)(－4 , 3) (C)(－8 , 3) (D)(8 , 3)

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $x^2+y^2+2kx-6y+(k^2+k+1)=0$ 是一點

$\Rightarrow$ $(x+k)^2+(y-3)^2=-k^2-k-1+k^2+3^2=0$ $\Rightarrow$ $8-k=0$ $\Rightarrow$ $k=8$

此點 $(-k,3)=(-8,3)$

(　　) 13.設圓 C ： $x^2+(y-2)^2=9$，點 $A(3,-2)$，若 P 為圓 C 上一點，則 $\overline{AP}$ 的最小值為 (A)2 (B)3 (C)5 (D)8

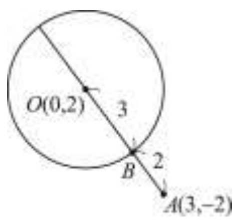
【隨堂講義補充題.】

解答 A

解析 $\because$ $3^2+(-2-2)^2>9$ $\therefore$ A 在圓 C 外部

圓心 $O(0,2)$，$r=\sqrt{9}=3$

$\overline{AP}$ 的最小值 $=\overline{AB}=\overline{OA}-r=\sqrt{(0-3)^2+(2-(-2))^2}-3=2$



(　　) 14.圓 $x^2+y^2-2x+6y+5=0$ 與直線 $2x+y+k=0$ 相交，則 k 的範圍為 (A) $-3<k<5$ (B) $-3\le k\le 5$ (C) $-4<k<6$ (D) $-4\le k\le 6$

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 圓：$(x-1)^2+(y+3)^2=5$，圓心 $(1,-3)$，$r=\sqrt{5}$

由題意知 $\dfrac{|2\times 1-3+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}\le\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ $|k-1|\le 5$

$\Rightarrow$ $-5\le k-1\le 5$ $\Rightarrow$ $-4\le k\le 6$

(　　) 15.自 $A(1,2)$ 向圓 $x^2+y^2=2$ 作二切線，切點為 P、Q，則△APQ 之外接圓方程式為 (A) $x^2+y^2+x-3y=0$ (B) $x^2+y^2+5x-5y=0$ (C) $x^2+y^2+3x-4y=0$ (D) $x^2+y^2-x-2y=0$

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 如圖：圓 $x^2+y^2=2$ 之圓心為 $O(0,0)$

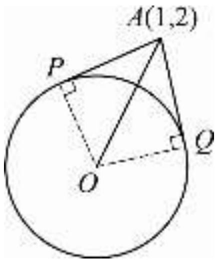
過 $A(1,2)$ 向圓所作二切線切圓於 P、Q，

則$\angle OPA = \angle OQA = 90°$（$\because$　過切點之半徑垂直切線）

$\Rightarrow$　O、P、A、Q 四點共圓，且以$\overline{OA}$為直徑

$\therefore$　$\triangle APQ$ 之外接圓方程式（以$\overline{OA}$為直徑）

為$(x-0)(x-1)+(y-0)(y-2)=0$　即 $x^2+y^2-x-2y=0$



(　　　) 16.下列哪一方程式所表示的圖形為一圓？　(A)$x^2+y^2-6x+4y+15=0$　(B) $y=\sqrt{9-x^2}$　(C) $x=1+\sqrt{9-y^2}$　(D) $\sqrt{x^2+y^2}=2$

【龍騰自命題.】

解答　D

(　　　) 17.圓 $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ 之圓心與點$(4, 5)$所連成之直線的斜率等於　(A)2　(B)4　(C)6　(D)8

【龍騰自命題.】

解答　B

(　　　) 18.以$(2, 1)$、$(3, -4)$為直徑端點的圓方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，則 $d+e+f=$　(A)5　(B)2　(C)0　(D)-2

【龍騰自命題.】

解答　C

(　　　) 19.圓 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 過$(-1, 1)$及$(1, 3)$兩點，且圓心在 x 軸上，則 $a-b+c=$　(A)-10　(B)-6　(C)1　(D)4

【龍騰自命題.】

解答　A

解析　$\because$　$x^2+y^2+ax+by+c=0$ 圓心在 x 軸上　$\Rightarrow$　$b=0$

又圓過$(-1, 1)$及$(1, 3)$兩點

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-a+b+c=0 \\ 10+a+3b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-c=2 \\ a+c=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ c=-6 \end{cases}$$

$\therefore$　$a-b+c=-10$

(　　　) 20.若直線 L 的方程式為 $2x+y+4=0$，圓 C 的方程式為 $x^2+y^2-2x-4y-11=0$，則直線 L 與圓 C 有幾個交點？　(A)3　(B)0　(C)4　(D)2

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　圓 $x^2+y^2-2x-4y-11=0$　$\Rightarrow$　$(x-1)^2+(y-2)^2=11+1^2+2^2=16$

$\Rightarrow$　圓心$(1, 2)$，半徑 $r=4$

圓心$(1, 2)$到直線 L：$2x+y+4=0$ 之距離 $d=\dfrac{|2\times1+2+4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}<r=4$

$\therefore$　直線 L 與圓 C 交 2 點

(　　　) 21.設圓 C 為 $x^2+y^2+2x+4y-4=0$，下列何點會在圓外？　(A)$(0, 0)$　(B)$(2, -2)$　(C)$(-1, -1)$　(D)$(5, 7)$

【龍騰自命題.】

解答　D

(　　　) 22.設圓 C：$x^2+y^2=25$，$P(x, y)$為圓 C 上任一點，則 $x-y$ 的最小值為　(A)5　(B)0　(C)-5　(D)$-5\sqrt{2}$

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　設 $P(x, y)=(5\cos\theta, 5\sin\theta)$　$\Rightarrow$　$x-y=5\cos\theta-5\sin\theta$

$\therefore$　最小值$=-\sqrt{5^2+(-5)^2}=-5\sqrt{2}$

(　　　) 23.$x^2+y^2-2x+2y=0$ 的圓心為(h, k)，半徑為 r，則　(A)$h+k=0$　(B)$h=r$　(C)$k=r$　(D)r 為整數

【龍騰自命題.】

解答 A

(　　　) 24.設 P 點$(-1,-2)$，圓 C：$x^2+y^2-2x+5y+7=0$，直線 L 過 P 點與圓 C 相切於 Q 點，則 $\overline{PQ}=$　(A)8　(B)6　(C)4　(D)2

【龍騰自命題.】

解答 D

(　　　) 25.設 $P(1,3)$對圓 $x^2+y^2=1$ 作二切線，切點分別為 A、B 兩點，圓心為 O 點，則 $OAPB$ 的外接圓方程式為　(A)$x^2+y^2+x+3y-20=0$　(B)$x^2+y^2+x-3y-2=0$　(C)$x^2+y^2-x-3y=0$　(D)$x^2+y^2-x+3y-18=0$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $OAPB$ 的外接圓 ＝ 以 $\overline{OP}$ 為直徑的圓

$\Rightarrow\ (x-0)(x-1)+(y-0)(y-3)=0\ \Rightarrow\ x^2+y^2-x-3y=0$