

0216 微積分

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

- () 1. 設 $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$, 下列何者錯誤? (A) $f(x)$ 有最小值 -7 (B) 在區間 $(-\infty, 2)$ 內, $f(x)$ 為遞增函數 (C) $f(x)$ 有最低點 $(2, -7)$ (D) $f(x)$ 有極小值 -7 (E) $f(x)$ 在區間 $(2, \infty)$ 內的圖形為凹口向上

【課本練習題-自我評量.】

解答 B

解析 $f'(x) = 4x - 8$

$$f''(x) = 4$$

$$\text{令 } f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

以 $x = 2$ 代入 $f''(x)$

$$\Rightarrow f''(2) = 4 > 0$$

 $\therefore f(x)$ 於 $x = 2$ 有最小值

$$f(2) = 8 - 16 + 1 = -7$$

- () 2. $\int (x+4)(x-2)^5 dx =$ (A) $\frac{1}{7}(x-2)^7 + c$ (B) $\frac{1}{6}(x-2)^6 + c$ (C) $\frac{1}{7}(x-2)^7 + (x-2)^6 + c$ (D) $\frac{1}{7}(x-2)^6(x+4) + c$

【龍騰自命題.】

解答 C

- () 3. 若 $f: \square \rightarrow \square$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 6, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$ 在 $x = 2$ 處連續, 則 $a =$ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 \therefore 函數 $f(x)$ 在 $x = 2$ 處連續

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

 \therefore 當 $x \rightarrow 2$ 極限存在

$$\therefore x^2 + ax - 6 \text{ 必有 } x - 2 \text{ 因式} \Rightarrow 2^2 + 2a - 6 = 0, a = 1$$

- () 4. $\int \sqrt{1-2x} dx =$ (A) $\frac{1}{3}\sqrt{(1-2x)^3} + c$ (B) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-2x)^3} + c$ (C) $\frac{2}{3}\sqrt{(1-2x)^3} + c$ (D) $-\frac{2}{3}\sqrt{(1-2x)^3} + c$

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 令 $u = 1 - 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow -\frac{1}{2} du = dx$

$$\text{故 } \int \sqrt{1-2x} dx = \int -\frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-2x)^3} + c$$

- () 5. $\int 2 dt =$ (A) $2x + c$ (B) $2 + c$ (C) $2t + c$ (D) 2

【隨堂講義補充題.】

解答 C

解析 所求 $= 2t + c$

- () 6. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ 之值為 (A) 不存在 (B) 3 (C) 2 (D) 1

【龍騰自命題.】

解答 B

- () 7. $\int_a^b 4 dx =$ (A) $a - b$ (B) 4 (C) $2b - a$ (D) $4(b - a)$ (E) $b - a$

【課本練習題-自我評量.】

解答 D

解析 $\int_a^b 4 dx = 4x|_a^b = 4(b-a)$

() 8. 設 $\int_2^3 f(x)dx = 5$, $\int_3^6 f(x)dx = 4$, $\int_0^2 g(x)dx = 2$, $\int_6^0 g(x)dx = -8$, 則 $\int_2^6 [6f(x) - 5g(x)]dx =$ (A)24 (B)20 (C)18 (D)15

【龍騰自命題.】

解答 A

() 9. 設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 在 $x = 1$ 有極小值 -3 , 則 $b =$ (A) -5 (B) -2 (C)1 (D)3

【龍騰自命題.】

解答 A

() 10. 設 $f(x) = (x^2 - 2x)^6$, 則 $f''(1) =$ (A)8 (B)24 (C)36 (D) -12

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $f'(x) = 6(x^2 - 2x)^5 (2x - 2)$

$A \quad B$

$f''(x) = A'B + AB' = 30(x^2 - 2x)^4(2x - 2)(2x - 2) + 6(x^2 - 2x)^5 \times 2 = 30(x^2 - 2x)^4(2x - 2)^2 + 12(x^2 - 2x)^5$

$\therefore f''(1) = -12$

() 11. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 11$ 之相對極大值為 M , 相對極小值為 m , 則 $M + m =$ (A)27 (B)24 (C)18 (D)9

【龍騰自命題.】

解答 D

() 12. 設 $f(x) = x^2 + x + 1$, 則 x 由 2 到 5 的平均變化率為 (A)2 (B)5 (C)8 (D)11

【龍騰自命題.】

解答 C

() 13. $\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx =$ (A) $\frac{2}{9}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{5}{9}$

【隨堂講義補充題.】

解答 A

解析 所求 $= \int_{-3}^{-1} (x^{-2} + x^{-3}) dx = \left(-x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} \right) \Big|_{-3}^{-1}$
 $= \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right) \Big|_{-3}^{-1} = \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{18} \right) = \frac{2}{9}$

() 14. 設 $a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 為一等比數列, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{9}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{81}{8}$, 則 $\sum_{n=1}^3 a_n$ 之值為 (A) $\frac{13}{3}$ (B) $\frac{14}{3}$ (C)5 (D) $\frac{16}{3}$

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 設 $a_n = ar^{n-1} \Rightarrow a_n^2 = a^2 \times r^{2n-2}$

$\frac{a}{1-r} = \frac{9}{2} \dots \textcircled{1}$

$\frac{a^2}{1-r^2} = \frac{81}{8} \dots \textcircled{2}$

$\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}}$ 得 $\frac{a}{1+r} = \frac{9}{4} \dots \textcircled{3}$

$\frac{\textcircled{3}}{\textcircled{1}}$ 得 $\frac{1-r}{1+r} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{3}$ 代入 $\textcircled{1}$ 得 $a = 3$

$\sum_{n=1}^3 a_n = \sum_{n=1}^3 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$

- () 15. 讓一皮球自離地面 16 公尺高處之窗口落下，此球每次反跳高度為原落下時的 $\frac{3}{5}$ ，則此球離開窗口起算至靜止於地面為止，總共的運動距離為 (A)64 公尺 (B)56 公尺 (C)48 公尺 (D)40 公尺

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $2 \times \left(\frac{16}{1 - \frac{3}{5}} \right) - 16 = 64$

- () 16. $f(x) = x^4 - 4x^3$ 圖形的凹口方向為 (A) $(-\infty, 0)$ 向下 (B) $(0, 2)$ 向上 (C) $(0, 2)$ 向下 (D) $(2, \infty)$ 向下

【龍騰自命題.】

解答 C

- () 17. $\lim_{x \rightarrow 2} |x| =$ (A)-2 (B)0 (C)2 (D)不存在

【龍騰自命題.】

解答 C

- () 18. 設 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ ，則下列何者錯誤？ (A) $f(x)$ 在 $x = 2$ 處有反曲點 (B) $f(x)$ 在開區間 $(1, 2)$ 之圖形為遞減 (C) $f(1)$ 為相對極小值 (D) $f(x)$ 在開區間 $(2, 3)$ 之圖形為上凹

【龍騰自命題.】

解答 C

- () 19. $\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{2x-17}{x^2-7x+6} + \frac{x-5}{x-6} \right)$ 的值為 (A) $\frac{9}{5}$ (B) $\frac{8}{5}$ (C) $\frac{7}{5}$ (D) $\frac{6}{5}$

【隨堂講義補充題.】

解答 B

- () 20. 下列的極限，何者錯誤？ (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n}{3n+4}$ 不存在 (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{4n+3} = 0$ (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+3}{2n+1} = 2$ (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} 4n = 4$

【隨堂測驗.】

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x-17+(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2-4x-12}{(x-1)(x-6)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x+2)(x-6)}{(x-1)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x+2}{x-1} = \frac{6+2}{6-1} = \frac{8}{5}$$

解答 D

解析 (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} 4n = \infty$ (不存在)

- () 21. 設 $f(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 5)$ ，則 $f'(1) =$ (A)8 (B)9 (C)10 (D)11

【隨堂講義補充題.】

解答 C

解析 $f'(x) = (x^2 + 3x + 1)'(x^2 - 3x + 5) + (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 5)'$

$$= (2x+3)(x^2-3x+5) + (x^2+3x+1)(2x-3)$$

$$\Rightarrow f'(1) = (2+3)(1-3+5) + (1+3+1)(2-3) = 10$$

- () 22. 試求 $y = x$ 及 $y = x^3$ 二圖形所圍區域的面積？ (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D)1

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $y = x$ 及 $y = x^3$ 的交點為 $(-1, -1)$ ， $(0, 0)$ ， $(1, 1)$ 所圍成的區域面積為

$$\int_{-1}^1 |x-x^3| dx$$

$$= \int_{-1}^0 |x-x^3| dx + \int_0^1 |x-x^3| dx = \int_{-1}^0 (-x+x^3) dx + \int_0^1 (x-x^3) dx$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4\right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

- () 23. 下列的極限，何者不存在？ (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n}$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^3}{n-5}$ (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0.1n^2 - 3}{99n + 8}$ (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n^3\theta)}{1+n}$

【隨堂測驗】

解答 C

解析 (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{2}{5}\right)^n \right]$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 - 0 = 0$

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^3}{n-5} = 0$

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0.1n^2 - 3}{99n + 8} = \infty$ (不存在)

(D) $-1 \leq \cos(n^3\theta) \leq 1$

$$\Rightarrow \frac{-1}{1+n} \leq \frac{\cos(n^3\theta)}{1+n} \leq \frac{1}{1+n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{1+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n^3\theta)}{1+n} = 0$$

- () 24. 已知 a 、 b 為實數，若過函數 $f(x) = ax^2 + bx$ 圖形上一點 $P(1,5)$ 的切線斜率為 3，則 $f'(2) =$ (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3

【104 年歷屆試題】

解答 B

解析 \because 點 $P(1,5)$ 在 $f(x)$ 的圖形上

$$\therefore f(1) = a \times 1^2 + b \times 1 = a + b = 5 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$\therefore f(x)$ 的圖形上一點 $P(1,5)$ 的切線斜率為 3

$$\therefore f'(1) = 2a \times 1 + b = 2a + b = 3 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

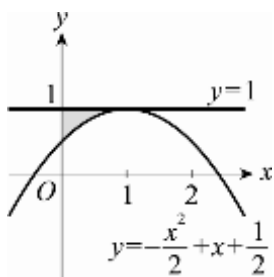
$$\textcircled{2} - \textcircled{1} : a = -2$$

$$a = -2 \text{ 代入 } \textcircled{1} : -2 + b = 5 \Rightarrow b = 7$$

$$\text{則 } f'(x) = 2 \times (-2) \times x + 7 = -4x + 7$$

$$\text{故 } f'(2) = -4 \times 2 + 7 = -1$$

- () 25. 由 $y = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$ ， $y = 1$ 和 $x = 0$ 所圍成的區域，如圖陰影部分，則此區域面積可由下列何式求得？



- (A) $\int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\right) dx$ (B) $\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\right) dx$ (C) $\int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\right) dx$ (D) $\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\right) dx$

【104 年歷屆試題】

解答 D

解析 $y = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$ 與 $y = 1$ 的交點坐標為 $(1, 1)$

在區間 $[0, 1]$ 上，

$$\text{所求面積} = \int_0^1 [1 - (-\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2})] dx = \int_0^1 (\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}) dx$$

