0111 第三冊　姓名　　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　)1.某校想要了解全校同學是否知道中央政府五院院長的姓名，出了一份考卷。該卷共有五個單選題，滿分 100 分，每題答對得 20 分，答錯得零分，不倒扣。閱卷完畢後，校方公布每題的答對率如下：

題號	一	二	三	四	五
答對率	80%	70%	60%	50%	40%

請問此次測驗全體受測同學的平均分數是(A)70 分　(B)65 分　(C)60 分　(D)55 分

【龍騰自命題.】

解答　C

解析　平均分數 $=(80\%+70\%+60\%+50\%+40\%)\times 20=3\times 20=60$

故選(C)

(　　)2.設 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$，則 $(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2+3$ 之值為(A)13(B)15(C)17(D)19

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4 \Rightarrow a^1+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2=16-2=14$

故 $(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2+3=a^1+a^{-1}+1=14+1=15$

(　　)3.問 $\log_2\frac{1}{32}+\log_3 81+\log_5 125=$　(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

【龍騰自命題.】

解答　C

(　　)4.若 $8^y=\sqrt{2}$，則 $y=$　(A)$\frac{2}{3}$　(B)$\frac{3}{2}$　(C)6　(D)$\frac{1}{6}$

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　$8^y=\sqrt{2} \Rightarrow 2^{3y}=2^{\frac{1}{2}}$　$\therefore 3y=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{6}$

(　　)5.設 $a=\sqrt[3]{10}$，$b=\sqrt{5}$，$c=\sqrt[4]{20}$，則下列敘述何者正確？　(A)$b>a>c$　(B)$b>c>a$　(C)$a>b>c$　(D)$a>c>b$

【龍騰自命題.】

解答　A

解析　$a=\sqrt[3]{10}=\sqrt[12]{10^4}$，$b=\sqrt{5}=\sqrt[12]{5^6}$，$c=\sqrt[4]{20}=\sqrt[12]{20^3}$

而 $5^6>10^4>20^3$，故 $b>a>c$

(　　)6.若 $\log_3 x+\log_3 y=2$，則 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 之最小值為何？　(A)0　(B)$\frac{1}{3}$

(C)$\frac{2}{3}$　(D)1

【095 年歷屆試題.】

解答　C

解析　$\log_3 x+\log_3 y=2 \Rightarrow \log_3 xy=2 \Rightarrow xy=3^2=9$

又 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 2\sqrt{\frac{1}{xy}} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 2\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 之最小值為 $\frac{2}{3}$

(　　)7.已知 $\log 2=0.3010$ 和 $\log 3=0.4771$，若 $1+3+3^2+\cdots+3^n>10^6$，則 n 最小整數值為　(A)12　(B)13　(C)14　(D)15

【龍騰自命題.】

解答　B

解析　$1+3+3^2+\cdots+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{3-1}>10^6$

$\Rightarrow 3^{n+1}>2\times 10^6+1 \Rightarrow (n+1)\log 3>\log 2+6$

$0.4771(n+1)>6.301 \Rightarrow n+1>13.21 \Rightarrow n>12.21$

$\therefore$ n 最小整數值為 13

(　　)8.某職棒球員之打擊率為 3 成，求此球員 5 次打擊，打中 3 次之機率為　(A)$C^5_3(0.3)^3(0.7)^2$　(B)$C^5_3(0.7)^3(0.3)^2$　(C)$C^3_5(0.3)^3(0.7)^2$　(D)$C^3_5(0.7)^3(0.3)^2$

【龍騰自命題.】

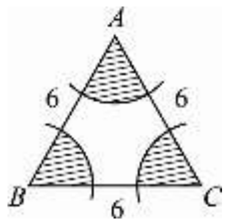
解答　A

(　　)9.在邊長為 6 的正三角形內部任取一點 P，則 P 到三頂點的距離皆大於 $\sqrt{3}$ 的機率為　(A)$\frac{12-\sqrt{3}\pi}{18}$ (B)$\frac{15-\sqrt{3}\pi}{18}$ (C)$\frac{18-\sqrt{3}\pi}{18}$ (D)$\frac{9-\sqrt{3}\pi}{9}$

【龍騰自命題.】

解答　C

解析　以 $\sqrt{3}$ 為半徑，A、B、C 為圓心畫弧（如圖），則空白部分即是大於 $\sqrt{3}$ 的部分



$\triangle ABC$ 面積 $=9\sqrt{3}$，空白部分面積 $=9\sqrt{3}-\frac{3\pi}{2}$

$\therefore$ 機率 $=\frac{9\sqrt{3}-\frac{3}{2}\pi}{9\sqrt{3}}=\frac{18-\sqrt{3}\pi}{18}$

(　　)10.投擲一枚 10 元硬幣三次，則出現一次正面，二次反面的機率為

(A)$\frac{1}{8}$　(B)$\frac{1}{4}$　(C)$\frac{3}{8}$　(D)$\frac{1}{2}$

【龍騰自命題.】

解答　C

(　　)11.設 $\sum_{k=1}^{10}a_k=7$，$\sum_{k=1}^{10}b_k=13$，則 $\sum_{k=1}^{10}(5a_k+3b_k-4)=$　(A)34

(B)39　(C)44　(D)49

【龍騰自命題.】

解答　A

(　　) 12.已知$(\frac{a}{x}-x^2)^{10}$展開式中，x^{11}的係數為 -960，則 a 值為　(A)6　(B)4　(C)3　(D)2

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　$(\frac{a}{x}-x^2)^{10}=C_0^{10}(\frac{a}{x})^{10}+\cdots+C_7^{10}\times(\frac{a}{x})^3(-x^2)^7+\cdots$

$\therefore\quad -C_7^{10}\times a^3=-960 \quad\Rightarrow\quad 120a^3=960$

$a^3=8 \qquad \therefore\quad a=2$

(　　) 13.有相同黑襪 3 雙、白襪 2 雙置於一袋中，今自袋中任取 4 隻，則這 4 隻恰為 2 雙的機率為何？　(A)$\frac{59}{105}$　(B)$\frac{57}{105}$　(C)$\frac{53}{105}$　(D)$\frac{51}{105}$

【隨堂講義補充題.】

解答　C

解析　$n(S)=C_4^{10}=210$

恰為 2 雙的情況：

①可為 2 雙黑：$C_4^6=15$

②可為 2 雙白：$C_4^4=1$

③可為1雙黑，1雙白：$C_2^6\times C_2^4=15\times 6=90$

故機率$=\frac{15+1+90}{C_4^{10}}=\frac{106}{210}=\frac{53}{105}$

(　　) 14.下圖為隨機號碼表，由第一列的第一個數字向右開始，每次取 1 個數字，模擬投擲 1 個均勻硬幣 10 次，出現正反面的試驗，並以 0、2、4、6、8 表正面，以 1、3、5、7、9 表反面，試問出現正面的次數？

隨機號碼表					
29280	39655	18902	92531	90374	07109
20123	82082	55477	22059	43168	12903
66405	35287	33248	67657	07702	01474
97299	83419	13069	17826	76984	48906
83923	92076	98880	33942	46841	58731

(A)3　(B)4　(C)5　(D)6

【龍騰自命題.】

解答　C

解析　取出的數字：2、9、2、8、0、3、9、6、5、5

所代表的正反面為：正、反、正、正、正、反、反、正、反、反

故正面出現 5 次

(　　) 15.設一等比數列的首項為 3，公比為$\frac{1}{2}$，試求其前 8 項的和為　(A)$\frac{765}{128}$　(B)$\frac{765}{256}$　(C)3　(D)4

【隨堂測驗.】

解答　A

解析　$a_1=3$，$r=\frac{1}{2}$

$$S_8=\frac{a_1(1-r^8)}{1-r}=\frac{3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3\left(1-\frac{1}{256}\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$=6\times\frac{255}{256}=\frac{3\times 255}{128}=\frac{765}{128}$$

(　　) 16.若$\log_A\sqrt[3]{64}=\frac{2}{3}$，$\log_{16}B=-\frac{1}{4}$，$\log_{\frac{1}{81}}27=C$，則 $A-2B+4C=$　(A)10　(B)8　(C)4　(D)1

【隨堂測驗.】

解答　C

解析　$\log_A\sqrt[3]{64}=\frac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad A^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{64}=64^{\frac{1}{3}}=(8^2)^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{2}{3}}$

$\therefore\quad A=8$

$\log_{16}B=-\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad B=16^{-\frac{1}{4}}=(2^4)^{-\frac{1}{4}}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

$\log_{\frac{1}{81}}27=\log_{3^{-4}}3^3=3\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\log_3 3=-\frac{3}{4}=C$

故 $A-2B+4C=8-2\times\frac{1}{2}+4\times\left(-\frac{3}{4}\right)=8-1-3=4$

(　　) 17.試求$C_0^{10}-C_1^{10}+C_2^{10}-C_3^{10}+\cdots\cdots+C_{10}^{10}$ 之值為　(A)0　(B)2^{10}　(C)2^8　(D)2^5

【隨堂測驗.】

解答　A

解析　$C_0^{10}-C_1^{10}+C_2^{10}-C_3^{10}+\cdots\cdots+C_{10}^{10}$

由$(x+y)^n=C_0^nx^n+C_1^nx^{n-1}y+C_2^nx^{n-2}y^2+\cdots\cdots+C_n^ny^n$

令 $x=1$，$y=-1$

$[1+(-1)]^n=C_0^n+C_1^n\times(-1)+C_2^n\times(-1)^2+\cdots\cdots+C_n^n(-1)^n$

$\Rightarrow\quad 0=C_0^n-C_1^n+C_2^n-\cdots\cdots+(-1)^nC_n^n$

故當 $n=10$ 時，$C_0^{10}-C_1^{10}+C_2^{10}-C_3^{10}+\cdots\cdots+C_{10}^{10}=0$

(　　) 18.試求$\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^{30}$ 展開式中，x^{82} 項的係數為　(A)315　(B)385　(C)435　(D)495

【隨堂測驗.】

解答　C

解析　$\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^{30}$ 展開式的一般項為

$$C_r^{30}(x^3)^{30-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=C_r^{30}x^{90-3r}x^{-r}=C_r^{30}x^{90-4r}$$

當 $x^{90-4r}=x^{82}$

$\therefore\quad 90-4r=82 \quad\Rightarrow\quad 8=4r \quad\Rightarrow\quad r=2$

故 x^{82} 項係數$=C_r^{30}=C_2^{30}=\frac{30!}{28!2!}=\frac{30\times 29}{2}=435$

(　　) 19.求$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots\cdots+\frac{1}{25\times 27}=$　(A)$\frac{24}{25}$　(B)$\frac{25}{26}$

(C) $\frac{24}{51}$ (D) $\frac{13}{27}$

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 原式

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{27}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{27}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[1-\frac{1}{27}\right]=\frac{1}{2}\times\frac{26}{27}=\frac{13}{27}$$

( ) 20.試求 $2\log_2 15+\log_2 12-3\log_2 3-2\log_2 5=$ (A) $-\frac{1}{2}$ (B) -2

(C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 $2\log_2 15+\log_2 12-3\log_2 3-2\log_2 5$

$=\log_2 225+\log_2 12-\log_2 27-\log_2 25$

$=\log_2\left(\frac{225\times 12}{27\times 25}\right)=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

( ) 21.若 $A=2468753$，試求 $\log\frac{1}{A}$ 的首數為何？(A) 6 (B) -9 (C) -8 (D) -7

【隨堂講義補充題.】

解答 D

解析 $\because$ $A=2468753$ $\Rightarrow$ A 為 7 位數

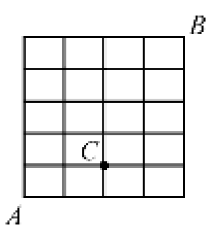
$\Rightarrow$ $\log A$ 的首數為 6

$\Rightarrow$ $\log A=6+\alpha$ （$0<\alpha<1$）

則 $\log\frac{1}{A}=\log A^{-1}=-\log A=-(6+\alpha)=-6-\alpha=-7+(1-\alpha)$

故 $\log\frac{1}{A}$ 的首數為 -7

( ) 22.如圖，一棋盤式街道，直街 5 條，橫街 6 條，則由 A 到 B，不經



過 C 點之捷徑有多少條？

(A) 45 (B) 81 (C) 110 (D) 126

【隨堂講義補充題.】

解答 B

解析 $A\to C$ 捷徑：$\frac{3!}{2!1!}=3$

$C\to B$ 捷徑：$\frac{6!}{4!2!}=15$

則 $A\to B$（經過 C）：$3\times 15=45$

$\therefore$ $A\to B$（不經過 C）＝全部走法－（經過 C）

$=\frac{9!}{5!4!}-\frac{3!}{2!1!}\times\frac{6!}{4!2!}=126-45=81$

( ) 23.平面上兩組平行線，由 5 條橫線及 7 條直線所構成，則此兩組平行線共可決定多少個平行四邊形？ (A) 420 (B) 360 (C) 210 (D) 150

【隨堂講義補充題.】

解答 C

解析 C_2^5（橫平行線）$\times C_2^7$（直平行線）$=\frac{5!}{3!2!}\times\frac{7!}{5!2!}=210$（個）

( ) 24.擲三枚公正的硬幣，若出現 x 個正面，則可獲得 $2x$ 元，若皆未出現正面則輸 8 元，則期望值為 (A)0 元 (B)2 元 (C)4 元 (D)6 元

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 ①出現 1 個正面的機率為 $\frac{3}{8}$，可得 2 元；

②出現 2 個正面的機率為 $\frac{3}{8}$，可得 4 元；

③出現 3 個正面的機率為 $\frac{1}{8}$，可得 6 元；

④皆未出現正面的機率為 $\frac{1}{8}$，要輸 8 元；

故期望值為 $\frac{3}{8}\times 2+\frac{3}{8}\times 4+\frac{1}{8}\times 6+\frac{1}{8}\times(-8)=2$ 元

( ) 25.三位正整數中，恰含有一個數字 2 的有 (A)220 個 (B)225 個 (C)240 個 (D)262 個【龍騰自命題.】

解答 B

解析 ①百位數字為 2 方法有 9×9 種（數字可重複）

②十位數字與個位數字為 2 的方法均為 $8\times 9=72$ 種（0 不可為百位）

$\therefore$ $81+72+72=225$（個）