

姓名 座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

() 1. 正整數 7^{2009} 乘開後的數字，其末二位數字為何？

(A)01 (B)07 (C)43 (D)49

【098 年歷屆試題。】

解答 B**解析** $7^1 = 7 \Rightarrow$ 末二位 07 $7^2 = 49 \Rightarrow$ 末二位 49 $7^3 = 343 \Rightarrow$ 末二位 43 $7^4 = 2401 \Rightarrow$ 末二位 01 $7^5 = 16807 \Rightarrow$ 末二位 07

⋮

週期為 4

 $\Rightarrow 7^{2009}$ 的末二位 = 7^1 的末二位 = 07

() 2. 自「0、1、2、3、4」中任取三個相異數字作成三位數

A，剩下二個數字作成二位數 B，則(A, B)有 (A)84 對 (B)75 對 (C)72 對 (D)54 對

【龍騰自命題。】

解答 C**解析** ①A 中含有 0： $\square\square\square$ $2 \times 2 \times 1$

4 個數字選 2 個

□

$$C_2^4 \times \underbrace{2 \times 2 \times 1}_{A \text{ 的排法}} \times \underbrace{2 \times 1}_{B \text{ 的排法}} = 48$$

②A 中不含 0：

 $\square\square\square$ $3 \times 2 \times 1$

4 個數字選 3 個

□

$$C_3^4 \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{A \text{ 的排法}} \times \underbrace{1 \times 1}_{B \text{ 的排法}} = 24$$

 $\therefore 48 + 24 = 72$

() 3. 用 1、2、3、4 四個數字排成一四位數(數字不可重複)，

則全部四位數之總和為 (A)44440 (B)55550

(C)66660 (D)77770

【龍騰自命題。】

解答 C**解析** 千位數字是 1 的情形有 6 種，是 2、3、4 的情形也均是 6 種 $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ $3 \times 2 \times 1$

同理百位、十位、個位是 1、2、3、4 的情形均 6 種

 \therefore 總和 = $(1 + 2 + 3 + 4) \times (1000 + 100 + 10 + 1) \times 6 =$

66660

() 4. 求 $1 + 2 \times C_1^n + 2^2 \times C_2^n + \dots + 2^n \times C_n^n =$ (A) 2^n (B) 3^n (C) 4^n (D) 5^n

【龍騰自命題。】

解答 B**解析** 由 $(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \dots + C_n^n x^n$ 令 $x=2$ 可得 $1 + 2 \times C_1^n + 2^2 \times C_2^n + \dots + 2^n \times C_n^n = 3^n$

() 5. 山路 5 條，甲、乙 2 人由不同的路上、下山，且每人

都不由原路下山，則全部方法有(A)260 種 (B)280 種

(C)320 種 (D)400 種

【龍騰自命題。】

解答 A**解析**

	甲上山 方法	甲下山 方法	乙上山 方法	乙下山 方法
--	-----------	-----------	-----------	-----------

① 乙由甲下山 路線上山	5	×	4	×	1	×	4
-----------------	---	---	---	---	---	---	---

② 乙不由甲下 山路線上山	5	×	4	×	3	×	3
------------------	---	---	---	---	---	---	---

 $\therefore 80 + 180 = 260$

() 6. 設某燈泡工廠生產了 1000 個燈泡，其中含有 8 個不良

品，今從中隨機取出 200 個燈泡，則含不良品的數学期望值為 (A)1.6 (B)2 (C)2.4 (D)3

【龍騰自命題。】

解答 A**解析** $E(x) = \frac{8}{1000} \times 200 = \frac{8}{5} = 1.6$ () 7. 方程式 $3^{2x} - 4 \times 3^x - 45 = 0$ 的解 $x =$ (A)9 (B)-5

(C)0 (D)2

【龍騰自命題。】

解答 D**解析** 原式 $\Rightarrow (3^x)^2 - 4 \times 3^x - 45 = 0 \Rightarrow (3^x - 9)(3^x + 5) = 0$ $\therefore 3^x = 9$ 或 $3^x = -5$ (不合)，故 $x = 2$ () 8. 已知 $\log M$ 的首數為 4，尾數不為 0，則 $\log \frac{1}{\sqrt{M}}$ 的首

數為 (A)-4 (B)-3 (C)-2 (D)-1

【龍騰自命題。】

解答 B**解析** $\log M = 4 + k, 0 < k < 1 \Rightarrow$

$$\log \frac{1}{\sqrt{M}} = -\frac{1}{2} \log M = -2 - \frac{1}{2}k = -3 + (1 - \frac{1}{2}k)$$

 \therefore 首數為 -3() 9. 集合 $\{(x, y, z) | x^2 + 3y + z = 20, x, y, z \text{ 為自然數}\}$ 之元

素個數為 (A)13 (B)14 (C)15 (D)16

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 ① $x=1, 3y+z=19 \rightarrow 6$ 組 \Rightarrow

y	1	2	3	4	5	6
z	16	13	10	7	4	1

6組

② $x=2, 3y+z=16 \rightarrow 5$ 組 \Rightarrow

y	1	2	3	4	5
z	13	10	7	4	1

5組

③ $x=3, 3y+z=11 \rightarrow 3$ 組 \Rightarrow

y	1	2	3
z	8	5	2

3組

組

④ $x=4, 3y+z=4 \rightarrow 1$ 組 \Rightarrow

y	1
z	1

1組

$\therefore 6+5+3+1=15$

() 10. 設 $10 < x < 100$, 且 $\log x$ 與 $\log \frac{1}{x}$ 尾數相同, 則 $x =$ (A)10
(B) $3\sqrt{5}$ (C) $10\sqrt{10}$ (D) $5\sqrt{10}$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $\log x - \log \frac{1}{x} = 2\log x$ 必為整數

$10 < x < 100 \Rightarrow 1 < \log x < 2 \Rightarrow 2 < 2\log x < 4$
 $\therefore 2\log x = 3$

故 $x = 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10}$

() 11. 設 $\log_5[\log_3(\log_2 x)] < 0$ 之解為 (A) $2 < x < 8$ (B) $1 < x < 8$ (C) $0 < x < 8$ (D) $5 < x < 125$

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $\log_5[\log_3(\log_2 x)] < 0 \Rightarrow 0 < \log_3(\log_2 x) < 1 \Rightarrow 1 < \log_2 x < 3$
 $\therefore 2 < x < 8$

() 12. $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$, 若 $S_n = n^2 + 3n$, 則 $a_n =$ (A) $2n-2$ (B) $2n$
(C) $2n+2$ (D) $2n+4$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 3n - (n-1)^2 - 3(n-1) = 2n+2$

() 13. 設 n, r 為自然數, 若 $P_r^n = 272$, $C_r^n = 136$, 則 $r =$
(A)5 (B)4 (C)3 (D)2

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $P_r^n = 272 \Rightarrow \frac{n!}{(n-r)!} = 272 \dots \textcircled{1}$

$C_r^n = 136 \Rightarrow \frac{n!}{r!(n-r)!} = 136 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 得 $r! = 2 \therefore r = 2$

() 14. 已知 $\log 3 = 0.4771$, $(\frac{1}{3})^n < 10^{-4}$, 則最小自然數 n 為
(A)8 (B)9 (C)10 (D)11

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 原式 $\Rightarrow \log(\frac{1}{3})^n < \log 10^{-4} \Rightarrow -n\log 3 < -4 \Rightarrow n\log 3 > 4$

$\Rightarrow n > \frac{4}{\log 3} \doteq 8.38$, 故最小自然數 $n = 9$

() 15. 滿足 $0 \leq \log_2[\log_2(\log_2 x)] \leq 1$ 之整數 x 共有 (A)10 個
(B)11 個 (C)12 個 (D)13 個

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 由 $0 \leq \log_2[\log_2(\log_2 x)]$, 知 $\log_2(\log_2 x) \geq 1 \therefore \log_2 x \geq 2, x \geq 4$

又由 $\log_2[\log_2(\log_2 x)] \leq 1$, 知 $\log_2(\log_2 x) \leq 2 \therefore \log_2 x \leq 4, x \leq 16$

故 $4 \leq x \leq 16$, 共 13 個

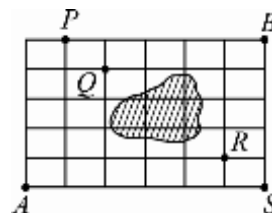
() 16. 問 $2^{1.5}$ 與下列何者最接近? (A)3.2 (B)3 (C)2.5
(D)2.8

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $2^{1.5} = 2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \doteq 2.828$

() 17. 如圖, 從 A 取捷徑到 B, 不經過斜線區域的走法有



(A)104 種 (B)105 種 (C)108 種 (D)112 種

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 〈法一〉

$$A \rightarrow P \rightarrow B \quad A \rightarrow Q \rightarrow B \quad A \rightarrow R \rightarrow B \quad A \rightarrow S \rightarrow B$$

$$\frac{6!}{5!1!} + \frac{6!}{4!2!} \times \frac{5!}{4!1!} + \frac{6!}{5!1!} \times \frac{5!}{4!1!} + 1$$

$$= 6 + 15 \times 5 + 6 \times 5 + 1 = 112$$

〈法二〉

	6	21	36	51	72	112
1	5	15	15	15	21	40
1	4	10			6	19
1	3	6			6	13
1	2	3			6	7
1			4	5		
A	1	1	1	1	1	1

共 112 種

() 18. 若 $\sqrt[3]{4\sqrt{8\sqrt{2}}} = 2^x$, $x =$ (A) $\frac{11}{9}$ (B) $\frac{11}{6}$ (C) $\frac{11}{3}$

(D) $\frac{11}{2}$

【龍騰自命題。】

解答 A

解析

$$\sqrt[3]{4\sqrt{8\sqrt{2}}} = [2^2(2^3 \times 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}} = [2^2(2^{\frac{10}{3}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}} = (2^2 \times 2^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{3}} = (2^{\frac{11}{3}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{11}{9}}$$

$$\therefore x = \frac{11}{9}$$

() 19. 某發報器長鳴一次 3 秒，短鳴一次 1 秒，相鄰兩鳴放時間為 2 秒，則前後 30 秒的時間，可發出幾種不同的信號？ (A)80 (B)70 (C)60 (D)50

【龍騰自命題。】

解答 A

解析 設長鳴 x 次，短鳴 y 次，則有 $x+y-1$ 個間隔

$$3x+y+2(x+y-1)=30, x, y \text{ 為非負整數}$$

$$5x+3y=32$$

x	1	4
y	9	4

$$\frac{10!}{9!} + \frac{8!}{4!4!} = 10 + 70 = 80 \text{ 種}$$

() 20. 依下列各條件將甲、乙、丙、丁、戊等五人排成一列，何種條件下的排法最多？ (A)甲、乙相鄰 (B)丙、丁不相鄰 (C)戊排首位 (D)乙不排首位

【龍騰自命題。】

解答 D

解析 (A) $4! \times 2! = 48$ (B) $P_2^4 \times 3! = 72$ (C) $4! = 24$ (D) $5! - 4! = 120 - 24 = 96$

() 21. 三位正整數中，恰含有一個數字 2 的有 (A)220 個 (B)225 個 (C)240 個 (D)262 個

【龍騰自命題。】

解答 B

解析 ①百位數字為 2 方法有 9×9 種 (數字可重複)
 ②十位數字與個位數字為 2 的方法均為 $8 \times 9 = 72$ 種 (0 不可為百位)
 $\therefore 81 + 72 + 72 = 225$ (個)

() 22. 用「0、1、2、3、4、5」作成大於 2300 的四位數，

數字可以重複使用，則共有 (A)752 個 (B)754 個 (C)755 個 (D)756 個

【龍騰自命題。】

解答 C

解析 〈法一〉

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\ 5 \times 6 \times 6 \times 6 = 1080$$

全部有 1080 個

- ① $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} 6 \times 6 \times 6 = 216$
- ② $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 0 & \square & \square \\ \hline \end{array} 6 \times 6 = 36$
- ③ $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & \square & \square \\ \hline \end{array} 6 \times 6 = 36$
- ④ $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & \square & \square \\ \hline \end{array} 6 \times 6 = 36$
- ⑤ $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} 1$

$$\therefore \text{大於 2300 有 } 1080 - 216 - 36 - 36 - 36 - 1 = 755 \text{ 個}$$

〈法二〉

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & \square & \square \\ \hline \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 3 \times 6 \times 6 \times 6 = 648$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 23 & \square \\ \hline \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 3 \times 6 \times 6 = 108$$

$$648 + 108 - 1 = 755$$

↓
2300

() 23. 設 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}}$, 則 a 、 b 、 c 大小順序為何？ (A) $a > c > b$ (B) $a > b > c$ (C) $c > a > b$ (D) $b > c > a$

【106 年歷屆試題。】

解答 C

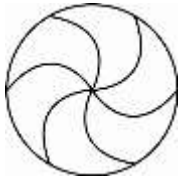
$$\text{解析 } a^6 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2} \times 6} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$b^6 = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \right]^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3} \times 6} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$c^2 = \left[\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}} \right]^6 = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6} \times 6} = \left(\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{1}{6}$$

$$\text{則 } b^6 < a^6 < c^6 \Rightarrow b < a < c$$

() 24. 用 8 種不同的顏料塗下圖轉盤的六個區域，每個區域顏色不得相同，塗法有



(A)3360 種 (B)3600 種 (C)3720 種 (D)3840 種

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $C_6^8 \times \frac{6!}{6} = 28 \times 5! = 28 \times 120 = 3360$ (種)

() 25. 設 a 、 b 、 c 三數成等比數列，且滿足 $a+b+c=9$ 及 $a^2+b^2+c^2=189$ ，則等比中項 $b=$ (A)-6 (B)-2 (C) $\frac{1}{2}$ (D)6

【106 年歷屆試題.】

解答 A

解析 〈法一〉

$\because a$ 、 b 、 c 成等比數列

$\therefore b^2 = ac$

$a^2 + b^2 + c^2 = 189 \Rightarrow a^2 + c^2 = 189 - b^2$

$a + b + c = 9 \Rightarrow a + c = 9 - b \Rightarrow$

$(a + c)^2 = (9 - b)^2$

$\Rightarrow a^2 + 2ac + c^2 = 81 - 18b + b^2 \Rightarrow$

$\underline{(a^2 + c^2)} + \underline{2ac} = 81 - 18b + b^2$

$\Rightarrow \underline{(189 - b^2)} + \underline{2b^2} = 81 - 18b + b^2 \Rightarrow 18b = -108$

$\Rightarrow b = -6$

〈法二〉

設等比數列 a 、 b 、 c 的公比為 r

則 $b = ar$ ， $c = ar^2$

$a + b + c = 9$

$\Rightarrow a + ar + ar^2 = 9 \dots \dots \textcircled{1}$

$\Rightarrow a(1 + r + r^2) = 9 \dots \dots \textcircled{2}$

$a^2 + b^2 + c^2 = 189$

$\Rightarrow a^2 + (ar)^2 + (ar^2)^2 = 189 \Rightarrow$

$a^2 + a^2r^2 + a^2r^4 = 189$

$\Rightarrow a^2(1 + r^2 + r^4) = 189 \dots \dots \textcircled{3}$

$\frac{\textcircled{3}}{\textcircled{2}} : \frac{a^2(1 + r^2 + r^4)}{a(1 + r + r^2)} = \frac{189}{9}$

$\Rightarrow \frac{a^2(1 + r + r^2)(1 - r + r^2)}{a(1 + r + r^2)} = 21 \Rightarrow$

$a(1 - r + r^2) = 21$

$\Rightarrow a - ar + ar^2 = 21 \dots \dots \textcircled{4}$

$\textcircled{1} - \textcircled{4} : 2ar = -12 \Rightarrow ar = -6$

$\therefore b = ar \quad \therefore b = -6$