0109 第三冊

姓名　　　　　　座號

一、單選題 (25 題 每題 4 分 共 100 分)

(　　) 1.設 $i=\sqrt{-1}$，若級數 $\sum_{n=1}^{50}(i^3)^n=a+bi$，則 $a+2b=$ (A) -1 (B) -3 (C)1 (D)3

【095 年歷屆試題.】

解答 B

解析 $\sum_{n=1}^{50}(i^3)^n=\sum_{n=1}^{50}(-i)^n=(-i)+(-i)^2+(-i)^3+\cdots+(-i)^{50}$

$=[(-i)+(-1)+i+1]+[(-i)+(-1)+i+1]+\cdots$

$+[(-i)+(-1)+i+1]+(-i)+(-1)$

$=0+0+\cdots+0-i-1=-1-i=a+bi$

即 $a=-1$，$b=-1$

$\therefore\ a+2b=-3$

(　　) 2.設 $47^x=423^y=81$，則 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=$ (A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E)1

【課本練習題-自我評量.】

解答 B

解析 $\begin{cases}47^x=81\\423^y=81\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log 47^x=\log 81\\\log 423^y=\log 81\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\log 47=\log 3^4=4\log 3\\y\log 423=\log 3^4=4\log 3\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{\log 47}{4\log 3}\\\frac{1}{y}=\frac{\log 423}{4\log 3}\end{cases}$

故 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{\log 47}{4\log 3}-\frac{\log 423}{4\log 3}=\frac{\log(47\div 423)}{4\log 3}=\frac{\log\frac{1}{9}}{4\log 3}=\frac{-2\log 3}{4\log 3}=-\frac{1}{2}$

(　　) 3.設 a、b、c、d 四正數成等比數列，若 $a+b=8$，$c+d=72$，則公比為 (A)2 (B)3 (C)4 (D)6

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 設四數為 a, ar, ar^2, ar^3 $\Rightarrow\begin{cases}a+ar=8\\ar^2+ar^3=72\end{cases}$

$\frac{a(1+r)}{ar^2(1+r)}=\frac{8}{72}=\frac{1}{9}$　　$\therefore\ r=\pm 3$（負不合）

(　　) 4.設某班統計學平時考試成績分別為 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，其平均數與變異數分別為 $\overline{X}$ 與 S^2，統計學老師認為測驗卷的題目太難，每人都加 10 分，則加分後的平均數與樣本變異數將改變為 (A) $\overline{X}$，S^2 (B) $\overline{X}+10$，S^2 (C) $\overline{X}$，$100S^2$ (D) $\overline{X}+10$，S^2+10

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 每人都加 10 分，則加分後的平均數會增加 10 分，即 $y_i=x_i+10$，$\overline{Y}=\overline{X}+10$。

（加分後的平均數 $\overline{Y}=\frac{\text{加分後的總分}}{n}=\frac{n\times\overline{X}+n\times 10}{n}=\overline{X}+10$）

每個人分數都加 10 分，並不會改變樣本變異數的值。

（$S_y^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{Y})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i+10-\overline{X}-10)^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2=S_x^2$）

(　　) 5.有八個數值資料如下：15，73，x，65，42，83，50，87，已知它們的中位數是 60，則 $x=$ (A)60 (B)57.5 (C)55 (D)50

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 由中位數為 60 可知 x 介在 50 及 65 之間，故將資料由小至大排列得：

15，42，50，x，65，73，83，87

中位數為最中間兩項相加除以 2，即 $\dfrac{x+65}{2}=60 \quad \Rightarrow \quad x=55$

(　　　) 6.若 $a^{2x}=\sqrt{2}+1$，求 $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^{x}-a^{-x}}=$ 　(A) $2\sqrt{2}+1$　(B) $2\sqrt{2}-1$　(C)2　(D) $2\sqrt{2}$

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^{x}-a^{-x}}=\dfrac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{2x}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}}{(\sqrt{2}+1)-1}=\dfrac{3+2\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+1$

(　　　) 7.設 $\log_5[\log_3(\log_2 x)]<0$ 之解為　(A) $2<x<8$　(B) $1<x<8$　(C) $0<x<8$　(D) $5<x<125$

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $\log_5[\log_3(\log_2 x)]<0 \quad \Rightarrow \quad 0<\log_3(\log_2 x)<1 \quad \Rightarrow \quad 1<\log_2 x<3$

$\therefore \quad 2<x<8$

(　　　) 8.已知 $4^{2x}=5$，則 $\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^{x}+2^{-x}}$ 之值為　(A) $\dfrac{4-\sqrt{5}}{5}$　(B) $\dfrac{6\sqrt{5}-5}{5}$　(C) $\dfrac{4+5\sqrt{5}}{5}$　(D) $\dfrac{5\sqrt{5}-4}{5}$

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $\because \quad 4^{2x}=5 \qquad \therefore \quad 2^{4x}=5$，$(2^x)^4=5$ 且 $(2^x)^2=\sqrt{5}$

故原式 $=\dfrac{2^{4x}+2^{-2x}}{2^{2x}+1}=\dfrac{5+\dfrac{1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{6\sqrt{5}-5}{5}$

(　　　) 9.設 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$，則 $(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2+3$ 之值為　(A)13　(B)15　(C)17　(D)19

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4 \quad \Rightarrow \quad a^1+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2=16-2=14$

故 $(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2+3=a^1+a^{-1}+1=14+1=15$

(　　　) 10.設三數成等比數列，其和為 63，其乘積為 1728，其公比大於 1，則公比為　(A)3　(B)7　(C)9　(D)4

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 設三數為 $\dfrac{x}{r}$，x，xr

$\because$　其乘積為 1728　　$\therefore$　$x^3=1728$，得 $x=12$

$\because$　其和為 63　　$\therefore$　$\dfrac{x}{r}+x+xr=63$

$\Rightarrow \quad \dfrac{12}{r}+12+12r=63 \quad \Rightarrow \quad 4r^2-17r+4=0 \quad \Rightarrow \quad r=4$ 或 $\dfrac{1}{4}$（不合）

(　　　) 11.A、B、C…等 6 人排成一列，規定 A 不排首、B 不排末，但 C 必排第二，其排法共有　(A)66 種　(B)78 種　(C)84 種　(D)96 種

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 排法 $=C$ 排第二方法 $-A$ 排首且 C 排第二方法 $-B$ 排末且 C 排第二方法 $+C$ 排第二，A 排首且 B 排末方法

$=5!-4!-4!+3!=120-24-24+6=78$

(　　) 12.用 100 元購買 5 元、10 元及 20 元的郵票，每一種郵票至少買 1 張，100 元全部用完，則購買方法有　(A)16 種　(B)20 種　(C)27 種　(D)35 種

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 設 5 元 x 張，10 元 y 張，x、y 為正整數

①20 元 1 張，$5x+10y=80$

x	14	12	10	8	6	4	2
y	1	2	3	4	5	6	7

共 7 種

②20 元 2 張，$5x+10y=60$

x	10	8	6	4	2
y	1	2	3	4	5

共 5 種

③20 元 3 張，$5x+10y=40$

x	6	4	2
y	1	2	3

共 3 種

④20 元 4 張，$5x+10y=20$

x	2
y	1

共 1 種

$\therefore\ 7+5+3+1=16$

(　　) 13.已知 $\sum_{k=0}^{4}(ak+b)=25$，$\sum_{k=2}^{5}(ak-b)=24$，則 $a=$　(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $\begin{cases}10a+5b=25\\14a-4b=24\end{cases}\ \Rightarrow\ a=2，b=1$

(　　) 14. $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$，若 $S_n=n^2+3n$，則 $a_n=$　(A)$2n-2$　(B)$2n-1$　(C)$2n+2$　(D)$2n+4$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+3n-(n-1)^2-3(n-1)=2n+2$

(　　) 15.已知 $(\frac{a}{x}-x^2)^{10}$ 展開式中，x^{11} 的係數為 -960，則 a 值為　(A)6　(B)4　(C)3　(D)2

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $(\frac{a}{x}-x^2)^{10}=C_0^{10}(\frac{a}{x})^{10}+\cdots+C_7^{10}\times(\frac{a}{x})^3(-x^2)^7+\cdots$

$\therefore\ -C_7^{10}\times a^3=-960\ \Rightarrow\ 120a^3=960$

$a^3=8\quad\therefore\ a=2$

(　　) 16.設 n、r 為自然數，若 $P_r^n=272$，$C_r^n=136$，則 $r=$　(A)5　(B)4　(C)3　(D)2

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 $P^n_r=272 \Rightarrow \dfrac{n!}{(n-r)!}=272\cdots$①

$C^n_r=136 \Rightarrow \dfrac{n!}{r!(n-r)!}=136\cdots$②

①÷②得 $r!=2$ $\quad\therefore\ r=2$

(　　　)17.$\log_9(\log_6 3)+\log_9(3+\log_3 8)$之值為 (A)$\frac{1}{2}$ (B)2 (C)-2 (D)$-\frac{1}{2}$

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $\log_9(\log_6 3)+\log_9(3+\log_3 8)$

$=\log_9[(\log_6 3)(3+\log_3 8)]=\log_9(3\log_6 3+\log_6 8)=\log_9(\log_6 216)=\log_9 3=\frac{1}{2}$

(　　　)18.由「1，2，3，4，5，6，7，8，9」九個數字中任取二個數相乘，其積為 6 的倍數之情形有 (A)14 種 (B)13 種 (C)12 種 (D)11 種

【龍騰自命題.】

解答 A

解析 $\because$ $6=2\times 3$ 2 的倍數有 2，4，6，8

3 的倍數有 3，6，9 將 6 另外考慮

①一數取 2 倍數（2，4，8），另一數取 3 倍數（3，9）方法 $3\times 2=6$

②一數取 6 另一數可取 1，…，5，7，8，9 方法 $1\times 8=8$

$\therefore$ $6+8=14$（種）

(　　　)19.已知 $\log 2=0.3010$ 和 $\log 3=0.4771$，若 $1+3+3^2+\cdots+3^n>10^6$，則 n 最小整數值為 (A)12 (B)13 (C)14 (D)15

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 $1+3+3^2+\cdots+3^n=\dfrac{3^{n+1}-1}{3-1}>10^6$

$\Rightarrow$ $3^{n+1}>2\times 10^6+1$ $\Rightarrow$ $(n+1)\log 3>\log 2+6$

$0.4771(n+1)>6.301$ $\Rightarrow$ $n+1>13.21$ $\Rightarrow$ $n>12.21$

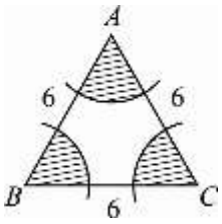
$\therefore$ n 最小整數值為 13

(　　　)20.在邊長為 6 的正三角形內部任取一點 P，則 P 到三頂點的距離皆大於 $\sqrt{3}$ 的機率為 (A)$\dfrac{12-\sqrt{3}\pi}{18}$ (B)$\dfrac{15-\sqrt{3}\pi}{18}$ (C)$\dfrac{18-\sqrt{3}\pi}{18}$ (D)$\dfrac{9-\sqrt{3}\pi}{9}$

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 以 $\sqrt{3}$ 為半徑，A、B、C 為圓心畫弧（如圖），則空白部分即是大於 $\sqrt{3}$ 的部分



$\triangle ABC$ 面積 $=9\sqrt{3}$，空白部分面積 $=9\sqrt{3}-\dfrac{3\pi}{2}$

$\therefore$ 機率 $=\dfrac{9\sqrt{3}-\frac{3}{2}\pi}{9\sqrt{3}}=\dfrac{18-\sqrt{3}\pi}{18}$

(　　　)21.某人投籃平均每五次投中三次，設此人在 n 次投籃中至少投中一次的機率大於 0.999，則 n 之最小值為（已知 $\log 2=0.3010$） (A)12

(B)10　(C)9　(D)8

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　投中一次的機率大於 0.999 相當於投不中的機率小於等於 0.001，投不中的機率每次為 $\frac{2}{5}$

$(\frac{2}{5})^n \le 0.001 \quad \Leftrightarrow \quad \log(\frac{2}{5})^n \le \log 0.001 \quad \Leftrightarrow \quad n(\log 2 - \log 5) \le -3$

$\Leftrightarrow \quad n(2\log 2 - 1) \le -3 \quad \Leftrightarrow \quad n \ge \frac{-3}{2\log 2 - 1} = \frac{-3}{-0.398} \fallingdotseq 7.5$

∴　n 之最小值為 8

(　　　) 22.6 件不同的禮物分給甲、乙、丙 3 人，其中 1 人得 1 件、1 人得 2 件、另 1 人得 3 件，則全部方法有　(A)480 種　(B)360 種　(C)120 種　(D)60 種

【龍騰自命題.】

解答　B

解析

6件分成1、2、3件方法　　1、2、3件分給甲、乙、丙3人之方法

$\frac{6!}{1!\,2!\,3!} \times 3! = 60 \times 6 = 360$

(　　　) 23.依下列各條件將甲、乙、丙、丁、戊等五人排成一列，何種條件下的排法最多？　(A)甲、乙相鄰　(B)丙、丁不相鄰　(C)戊排首位　(D)乙不排首位

【龍騰自命題.】

解答　D

解析　(A)$4! \times 2! = 48$　(B)$P^4_2 \times 3! = 72$　(C)$4! = 24$　(D)$5! - 4! = 120 - 24 = 96$

(　　　) 24.四對夫婦圍圓桌而坐，每對夫婦相對而坐的方法有　(A)120 種　(B)96 種　(C)72 種　(D)48 種

【龍騰自命題.】

解答　D

解析

可翻轉

夫先入座

$\frac{4!}{4} \times 2^4 \times \frac{1}{2} = 6 \times 16 \times \frac{1}{2} = 48$（種）

每對夫婦均可交換

(　　　) 25.三位正整數中，恰含有一個數字 2 的有　(A)220 個　(B)225 個　(C)240 個　(D)262 個【龍騰自命題.】

解答　B

解析　(1)百位數字為 2 的個數有 $9 \times 9 = 81$ 個（數字可重複）

(2)十位數字與個位數字為 2 的個數均為 $8 \times 9 = 72$（個）（0 不可為百位）

∴　$81 + 72 + 72 = 225$（個）