

一、單選題 (40 題)

- ( ) 1. 設  $n$  為自然數，若  $(x+y)^n$  依  $x$  的降幕展開式中，第 12 項的係數與第 22 項的係數相等，則  $n =$  (A)30 (B)31 (C)32 (D)33

【課本練習題-自我評量.】

解答 C

解析 依題意得  $C_{11}^n = C_{21}^n$ ，故  $n = 11 + 21 = 32$

- ( ) 2. 四對夫婦圍圓桌而坐，每對夫婦相對而坐的方法有 (A)120 種 (B)96 種 (C)72 種 (D)48 種

【龍騰自命題.】

解答 D

解析



可翻轉

夫先入座 □

$$\frac{4!}{4} \times 2^4 \times \frac{1}{2} = 6 \times 16 \times \frac{1}{2} = 48 \text{ (種)}$$

□

每對夫婦均可交換

- ( ) 3. 學校福利社賣 3 種飲料：牛奶、果汁、咖啡，高二勇班 35 位同學一起前往福利社。若已知至少有 3 人想喝咖啡，至少有 2 人不想喝任何飲料，問福利社阿姨可端出幾種情形？ (A)3486 種 (B)4864 種 (C)5456 種 (D)6278 種

【龍騰自命題.】

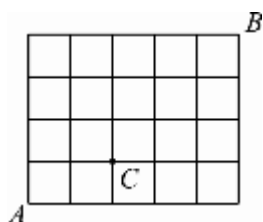
解答 C

解析 可視為  $x+y+z+u=35$ ， $x \geq 3$ ， $y \geq 0$ ， $z \geq 0$ ， $u \geq 2$  的非負整數解

$$\text{原式} = (x-3) + y + z + (u-2) = 30$$

$$\therefore H_{30}^4 = C_{30}^{33} = C_3^{33} = 5456 \text{ (種)}$$

- ( ) 4. 如下圖，



一棋盤式街道有直街 6 條、橫街 5 條，試問由 A 到 B 的捷徑中，不經過 C 點的走法有幾種？ (A)126 (B)96 (C)66 (D)60

【課本練習題-自我評量.】

解答 C

解析 不經過 C 點的走法 = (全部走法) - (經過 C 點的走法)

$$\text{法} = \frac{(5+4)!}{5!4!} - \frac{(2+1)!}{2!1!} \times \frac{(3+3)!}{3!3!} = 66 \text{ (種)}$$

- ( ) 5. 若平面上有八點構成一八邊形，則其對角線共有 (A)20 條 (B)22 條 (C)24 條 (D)26 條

【龍騰自命題.】

解答 A

$$\text{解析 對角線個數} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{8 \times 5}{2} = 20$$

$$\text{【另解】 } C_2^8 - 8 = 20$$

- ( ) 6. 用 7 種不同顏色塗在下圖甲、乙、丙、丁、戊等五個區域中，



若規定顏色不重複使用且每一區域只能塗滿一種顏色，試問共可塗出幾種不同的著色樣式？(提示：

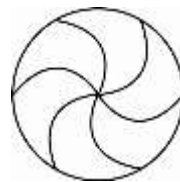
$$H_5^7 = C_5^{5+7-1}) \text{ (A)} P_5^7 \text{ (B)} C_5^7 \text{ (C)} H_5^7 \text{ (D)} 7^5$$

【課本練習題-自我評量.】

解答 A

解析 依題意，顏色不重複，故塗法相當於由 7 種顏色取 5 種的排列數，即  $P_5^7$  種

- ( ) 7. 用 8 種不同的顏料塗下圖轉盤的六個區域，每個區域顏色不得相同，塗法有



$$\text{(A)3360 種 (B)3600 種 (C)3720 種 (D)3840 種}$$

【龍騰自命題.】

解答 A

$$\text{解析 } C_6^8 \times \frac{6!}{6} = 28 \times 5! = 28 \times 120 = 3360 \text{ (種)}$$

- ( ) 8. 設  $n > r$ ，排列  $P_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$  且  $P_4^{n+2} : P_3^{2n} = 3 : 2$ ，則  $C_2^2 + C_2^3 + \cdots + C_2^n$  之值為 (A)84 (B)86 (C)88 (D)90

【龍騰自命題.】

解答 A

解析  $(n+2)(n+1) \times n \times (n-1) : 2n(2n-1)(2n-2) = 3 : 2$  整理得

$$(n+2)(n+1) : 2(2n-1) = 3 : 1$$

$$\Rightarrow n^2 + 3n + 2 = 12n - 6 \Rightarrow n^2 - 9n + 8 = 0 \Rightarrow (n-1)(n-8) = 0$$

$$\Rightarrow n = 8 \text{ 或 } 1 \text{ (不合)}$$

$$\therefore C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \cdots + C_2^8 = C_3^9 = \frac{9!}{3!6!} = 84$$

- ( ) 9. 甲、乙、丙、……等 7 人圍一圓桌而坐，甲、乙必須

相鄰，但甲、丙不得相鄰的坐法有幾種？ (A)96 種  
(B)144 種 (C)192 種 (D)288 種

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 將甲、乙視為一組，丙放入間隔中



丙有四種坐法

□

$$\text{坐法} = \frac{5!}{5} \times 2! \times C_1^4 = 24 \times 2 \times 4 = 192 \text{ (種)}$$

□

甲乙可互換

- ( ) 10. 甲、乙、丙 3 人在排成一列的 8 個座位中，選坐 3 個相連的座位，其坐法共有幾種？ (A)48 種 (B)36 種 (C)24 種 (D)12 種

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 ∵ 三個相連的座位有 6 種情形

$$\therefore 6 \times 3! = 36 \text{ (種)}$$

- ( ) 11. 用 1、2、3、4 四個數字排成一四位數（數字不可重複），則全部四位數之總和為 (A)44440 (B)55550 (C)66660 (D)77770

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 千位數字是 1 的情形有 6 種，是 2、3、4 的情形也均是 6 種



$$3 \times 2 \times 1$$

同理百位、十位、個位是 1、2、3、4 的情形均 6 種

$$\therefore \text{總和} = (1 + 2 + 3 + 4) \times (1000 + 100 + 10 + 1) \times 6 = 66660$$

- ( ) 12. 方程式  $x + 2y + 3z = 8$  的非負整數解有幾組？ (A)10 (B)9 (C)8 (D)7

【隨堂講義補充題.】

解答 A

解析  $z=0$  時， $x+2y=8$ ， $(x, y)$  有  $(0, 4)$ ， $(2, 3)$ ， $(4, 2)$ ， $(6, 1)$ ， $(8, 0)$

$z=1$  時， $x+2y=5$ ， $(x, y)$  有  $(1, 2)$ ， $(3, 1)$ ， $(5, 0)$

$z=2$  時， $x+2y=2$ ， $(x, y)$  有  $(0, 1)$ ， $(2, 0)$

∴ 共有  $5+3+2=10$  組

- ( ) 13.  $(x^2+1) + (x^2+1)^2 + \dots + (x^2+1)^{12}$  展開式中， $x^4$  項之係數為 (A)143 (B)286 (C)386 (D)486

【龍騰自命題.】

解答 B

解析 因為是等比級數，故

$$\text{原式} = \frac{(x^2+1)[(x^2+1)^{12}-1]}{(x^2+1)-1} = \frac{(x^2+1)^{13}-(x^2+1)}{x^2}$$

原式中  $x^4$  項之係數即為  $(x^2+1)^{13}$  展開式中  $x^6$  項

$$= C_{10}^{13} \times (x^2)^3 \times 1^{10} = 286x^6$$

$$\text{【另解】 } C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \dots + C_2^{12} = C_3^{13} = 286$$

- ( ) 14. 某次考試，由 10 題選做 8 題，但規定前 4 題至少做 3 題，則選法共有幾種？ (A)40 種 (B)25 種 (C)39 種 (D)50 種

【龍騰自命題.】

解答 C

解析 前 4 題選 3 題，後 6 題選 5 題： $C_3^4 \times C_5^6 = 4 \times 6 = 24$

前 4 題選 4 題，後 6 題選 4 題： $C_4^4 \times C_4^6 = 1 \times 15 = 15$

$$\therefore \text{共 } 24 + 15 = 39 \text{ 種}$$

- ( ) 15.  $(x+y+z+u)^{10}$  展開後，共有幾個不同的項？ (A)432 (B)378 (C)360 (D)286

【龍騰自命題.】

解答 D

解析  $H_{10}^4 = C_{10}^{13} = 286$  (個)

- ( ) 16. 甲、乙兩地間有 10 條路，其中有 2 條是甲到乙的單行道，有 3 條是乙到甲的單行道，某君開車從甲地到乙地，再返回甲地，若規定往、返不走相同的路，則走法有 (A)72 種 (B)56 種 (C)54 種 (D)51 種

【龍騰自命題.】

解答 D

解析

去 返

$$\left. \begin{array}{l} (1) \text{甲到乙地時走單行道} \quad 2 \times 8 = 16 \\ (2) \text{不走單行道} \quad 5 \times 7 = 35 \end{array} \right\} \text{共 } 16 + 35 =$$

51 種

- ( ) 17.  $(71)^{72}$  除以 100 之餘數為 (A)11 (B)21 (C)31 (D)41

【龍騰自命題.】

解答 D

解析 利用二項式定理

$$71^{72} = (70+1)^{72}$$

$$= \underbrace{C_0^{72} 70^{72} + C_1^{72} 70^{71} + C_2^{72} 70^{70} + \dots + C_{70}^{72} 70^2 + C_{71}^{72} 70 + C_{72}^{72}}_{\text{可被 } 100 \text{ 整除}}$$

∴  $71^{72}$  除以 100 之餘數，即為  $C_{71}^{72} 70 + C_{72}^{72} = 5041$  除以 100 之餘數

$$5041 \div 100 \text{ 之餘數為 } 41, \text{ 則所求之餘數為 } 41$$

- ( ) 18. 4 男 4 女圍一圓桌而坐，任二女均不相鄰之方法有幾種？ (A)288 (B)144 (C)64 (D)128

【龍騰自命題.】

解答 B

**解析** 4男先坐，坐法有  $\frac{4!}{4} = 3! = 6$

再將4女插入間隔，方法有  $4! = 24$

$\therefore$  方法有  $6 \times 24 = 144$  種

- ( ) 19. 滿足  $x+y+z+u \leq 6$  的正整數解有 (A)10 組 (B)15 組 (C)84 組 (D)210 組

【龍騰自命題.】

**解答** B

**解析**  $x+y+z+u \leq 6, x, y, z, u$  為正整數  $\Rightarrow x+y+z+u+t=6$

$x, y, z, u$  為正整數,  $t$  為非負整數

$\therefore H_{6-4}^5 = H_2^5 = C_2^6 = 15$  (組)

- ( ) 20. 山路5條，甲、乙2人由不同的路上、下山，且每人都由原路下山，則全部方法有 (A)260種 (B)280種 (C)320種 (D)400種

【龍騰自命題.】

**解答** A

**解析**

	甲上山	甲下山	乙上山	乙下山			
	方法	方法	方法	方法			
(1)乙由甲下山 路線上山	5	×	4	×	1	×	4
(2)乙不由甲下 山路線上山	5	×	4	×	3	×	3

$\therefore 80 + 180 = 260$  (種)

- ( ) 21. 5枝相同的鉛筆、6枝相同的原子筆，全部分給甲、乙2人，每人至少得1枝，方法有 (A)72種 (B)70種 (C)42種 (D)40種

【龍騰自命題.】

**解答** D

**解析** 每人至少得一枝

= 全部 - 甲沒拿到 - 乙沒拿到

=  $H_5^2 \times H_6^2 - 1 - 1 = C_5^6 \times C_6^7 - 2 = 42 - 2 = 40$  (種)

- ( ) 22. 4人圍圓桌而坐的方法有多少種? (A)4!種 (B)3!種 (C) $\frac{4!}{3!}$ 種 (D) $\frac{3!}{3}$ 種

【隨堂測驗.】

**解答** B

**解析** 即4人作環狀排列的排列數

有  $\frac{1}{4} \times P_4^4 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4} = 3!$  種

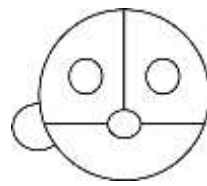
- ( ) 23. 有10個選舉人，4個候選人，以無記名方式投票，每人1票，沒有廢票，其結果共有 (A)324種 (B)286種 (C)255種 (D)210種

【龍騰自命題.】

**解答** B

**解析**  $H_{10}^4 = C_{10}^{13} = C_3^{13} = 286$  (種)

- ( ) 24. 用4種不同的色筆將圖中的每個區域著色，規定相鄰區域不同色，顏色可以重複使用，共有幾種著色方法?

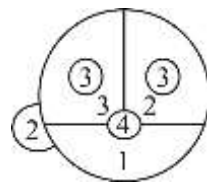


(A)48 (B)96 (C)432 (D)864

【隨堂講義補充題.】

**解答** C

**解析**  $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 3 \times 2 = 432$



- ( ) 25. 三位數中，偶數的共有

(A)500個 (B)480個 (C)450個 (D)400個

【龍騰自命題.】

**解答** C

**解析** 偶數者個位數必為0、2、4、6、8

$= 80$   
 $\begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \uparrow & & \downarrow \\ & \text{不得為0} & \\ & & \text{只能用0、2、4、6、8} \end{array}$   
 $= 180$

$\therefore$  三位數中，偶數的有  $9 \times 10 \times 5 = 450$  (個)

- ( ) 26. 甲、乙兩地間有12條路，其中有3條是由甲到乙的單行道，有4條是由乙到甲的單行道，某人開車由甲地到乙地，再返回甲地，若規定往返不走相同的路，則走法有幾種? (A)35 (B)40 (C)62 (D)67

【龍騰自命題.】

**解答** D

**解析** (往、返不走相同路的方法)

= (全部走法) - (往、返走相同路的方法) =  $8 \times 9 - 5 = 67$  (種)

- ( ) 27. 桔子5個、蘋果4個、鳳梨3個，全部分給甲、乙2人，若每人至少得1個，則方法有 (A)119種 (B)118種 (C)60種 (D)59種

【龍騰自命題.】

**解答** B

**解析**

$H_5^2 \times H_4^2 \times H_3^2 - 2 = C_5^6 \times C_4^5 \times C_3^4 - 2 = 6 \times 5 \times 4 - 2 = 118$  (種)

- ( ) 28. 依下列各條件將甲、乙、丙、丁、戊等五人排成一列，何種條件下的排法最多? (A)甲、乙相鄰 (B)丙、丁不相鄰 (C)戊排首位 (D)乙不排首位

【龍騰自命題.】

**解答** D

**解析** (A) $4! \times 2! = 48$  (B) $P_2^4 \times 3! = 72$  (C) $4! = 24$  (D) $5! - 4! = 120 - 24 = 96$

- ( ) 29. 某考試卷，規定由6題中任選4題作答，若指定前2題一定須作答，則共有多少種選法？ (A)6種 (B)10種 (C)5種 (D)4種

**【隨堂測驗】**

**解答** A

**解析** 前2題一定要入選作答，方法只有1種，再自剩下的4題中任選2題，

$$\text{方法有 } C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ 種}$$

所以選法有  $1 \times 6 = 6$  種

- ( ) 30. 三位數的自然數中，至少含有一個數字「7」的有多少個？ (A)343個 (B)252個 (C)352個 (D)243個

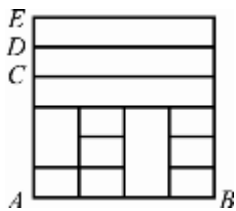
**【龍騰自命題】**

**解答** B

**解析** 至少含有一個數字7的個數

$$= \text{全部} - \text{都不含數字7} = 9 \times 10 \times 10 - 8 \times 9 \times 9 = 900 - 648 = 252 \text{ (個)}$$

- ( ) 31. 如圖，若規定由A到B只能遵循 $\uparrow$ 、 $\rightarrow$ 、 $\downarrow$ 三種方向，則全部有多少種走法？

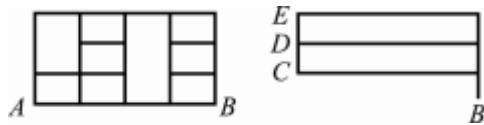


- (A)96 (B)97 (C)98 (D)99

**【龍騰自命題】**

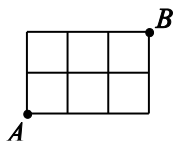
**解答** D

**解析**



$$(3 \times 4 \times 2 \times 4) + 3 = 96 + 3 = 99 \text{ 種}$$

- ( ) 32. 如圖，一棋盤式的街道有直街4條、橫街3條，則A到B的捷徑走法有幾種？(捷徑即只許向右、向上走)



- (A)35種 (B)45種 (C)10種 (D)20種

**【隨堂測驗】**

**解答** C

**解析** 設向右走過一個街口，用「右」表示；向上走過一個街口用「上」表示，則A到B取捷徑的走法，都由3個「右」及2個「上」排列而成

所以由A取捷徑到B的方法共有  $\frac{5!}{3!2!} = 10$  種

- ( ) 33. 由0, 1, 2, 3, 4, 5, 6中任取相異三數作成三位數，則不小於340的有多少個？ (A)105個 (B)110個 (C)115個 (D)120個

**【龍騰自命題】**

**解答** A

**解析** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6任取相異三數作成三位數的個數有  $6 \times 6 \times 5 = 180$  個

$$1 \square \square \quad 1 \text{ 開頭的有 } 6 \times 5 = 30$$

$$2 \square \square \quad 2 \text{ 開頭的有 } 6 \times 5 = 30$$

$$30 \square \quad 30 \text{ 開頭的有 } 5 \text{ 個}$$

$$31 \square \quad 31 \text{ 開頭的有 } 5 \text{ 個}$$

$$32 \square \quad 32 \text{ 開頭的有 } 5 \text{ 個}$$

$$\therefore \text{ 不小於 } 340 \text{ 有 } 180 - 30 - 30 - 5 - 5 - 5 = 105 \text{ 個}$$

- ( ) 34. 設  $a = C_1^{10} + C_2^{10} + \dots + C_{10}^{10}$ ， $b = C_1^9 + C_3^9 + C_5^9 + C_7^9 + C_9^9$ ，則  $a + b =$  (A)1279 (B)1280 (C)1565 (D)1566

**【龍騰自命題】**

**解答** A

**解析**  $\therefore C_0^{10} + C_1^{10} + C_2^{10} + \dots + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1024$

$$\therefore a = 1024 - 1 = 1023$$

$$b = \frac{2^9}{2} = 2^8 = 256 \Rightarrow a + b = 1023 + 256 = 1279$$

- ( ) 35. 假設5個人一起到冷飲店消費，該店共賣3種飲料，這5人每人點一杯飲料，就這5個人而言，有幾種買法？ (A) $3^5$  (B) $5^3$  (C)5! (D) $P_3^5$

**【隨堂講義補充題】**

**解答** A

**解析** 每個人有3種選擇，共有  $3^5$  種

- ( ) 36. 用0, 1, 2, 3, 4, 5, 6七個數字中任取二個排成二位數，數字可重複，共有幾種不同的二位數？ (A)49 (B)42 (C)36 (D)30

**【隨堂講義補充題】**

**解答** B

**解析**  $6 \times 7 = 42$

- ( ) 37. 平面上有相異的3個圓和5條直線，至多可形成幾個交點？ (A)15 (B)30 (C)36 (D)46

**【龍騰自命題】**

**解答** D

**解析** ①圓與圓： $C_2^3 \times 2 = 6$

$$\text{②圓與直線：} C_1^3 \times C_1^5 \times 2 = 30$$

$$\text{③直線與直線：} C_2^5 \times 1 = 10$$

$$\therefore \text{ 平面上 } 3 \text{ 個圓，} 5 \text{ 條直線，至多可形成 } 6 + 30 + 10 = 46 \text{ 個交點}$$

- ( ) 38. 袋中裝有12個球，其中有5個黑球與7個白球，今任意取出5個球為一組，其中至少有3個黑球的取法

有幾種？ (A)10 (B)210 (C)246 (D)792

【隨堂講義補充題.】

**解答** C

**解析**  $C_3^5 C_2^7 + C_4^5 C_1^7 + C_5^5 = 246$

( )39.某老師要請五位同學喝飲料，而福利社有賣 3 種飲料，每種至少有 5 瓶，則老師去購買 5 瓶有幾種買法？

(A)60 (B)45 (C)21 (D)10

【隨堂講義補充題.】

**解答** C

**解析**  $H_3^5 = 21$

( )40.10 顆糖果全部分給甲、乙、丙三個兒童，每人至少得 2 顆的分法有幾種？ (A)66 (B)45 (C)15 (D)10

【隨堂講義補充題.】

**解答** C

**解析**  $H_3^8 = 15$

## 二、填充題 (22 格)

1.有 10 元鈔 2 張、50 元鈔 3 張、100 元鈔 4 張、1000 元鈔 1 張，則付款方式共有(1)\_\_\_\_\_種，又可配成(2)\_\_\_\_\_種不同的款項。

【龍騰自命題】

**解答** (1)119;(2)71

**解析** (1)10 元 2 張付款方式有 3 種——不付、付 1 張、付 2 張，

同理 50 元 4 種，100 元 5 種，1000 元 2 種，但須扣除統統不付的情形

$$\therefore 3 \times 4 \times 5 \times 2 - 1 = 120 - 1 = 119 \text{ (種)}$$

(2) $\therefore$  50 元 2 張 = 100 元

$\therefore$  原題視為 10 元 2 張，50 元 1 張，100 元 5 張，1000 元 1 張

$$3 \times 2 \times 6 \times 2 - 1 = 72 - 1 = 71 \text{ (種)}$$

2.  $(a+b+c+d)(e+f+g)(x+y+z+u+v)$  展開後，共可得 \_\_\_\_\_ 個不同的項。

【龍騰自命題】

**解答** 60

3.方程式  $x+2y=10$  有 \_\_\_\_\_ 組正整數解。

【隨堂測驗】

**解答** 4

**解析**  $x+2y=10$ ，其中  $x$ 、 $y$  為正整數

因為  $y$  的係數最大，所以討論  $y=1, 2, 3, 4$

得解有  $(8,1), (6,2), (4,3), (2,4)$  等四組正整數解

4.由 1、2、3、4 等四個數字排成四位數，其中大於 2300 者共有 \_\_\_\_\_ 個。(數字不可重複)

【龍騰自命題】

**解答** 16

**解析** ①千位放 3 或 4： $2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$

②千位放 2： $1 \times 2 \times 2 \times 1 = 4$

$$\therefore 12 + 4 = 16 \text{ (個)}$$

5.5 個人中，恰有 2 人在同一月份出生，3 人在另一同月份出生的情形有 \_\_\_\_\_ 種。

【龍騰自命題】

**解答** 1320

**解析**

$$\begin{array}{l} \text{5人中} \quad \quad \quad \text{一年有} \quad \quad \quad \text{另三人在} \\ \text{任選2人} \quad \quad \quad \text{12個月} \quad \quad \quad \text{另一同月份} \\ C_2^5 \quad \times \quad 12 \quad \times \quad 11 \quad = 1320 \text{ (種)} \end{array}$$

6.甲家有 4 男 2 女，乙家有 3 男 3 女，則每家選出 4 人而成 5 男 3 女的方法有 \_\_\_\_\_ 種。

【龍騰自命題】

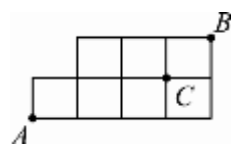
**解答** 93

**解析**

甲	乙	方法數
4 男	1 男 3 女	$C_4^4 \times C_1^3 \times C_3^3 = 3$
3 男 1 女	2 男 2 女	$C_3^4 \times C_1^2 \times C_2^3 \times C_2^3 = 72$
2 男 2 女	3 男 1 女	$C_2^4 \times C_2^2 \times C_3^3 \times C_1^3 = 18$

$$\therefore 3 + 72 + 18 = 93 \text{ (種)}$$

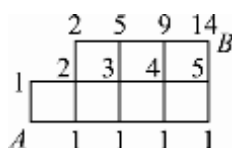
7.如下之街道圖中，由 A 到 B 的捷徑走法中，不經過 C 的方法有 \_\_\_\_\_ 種。



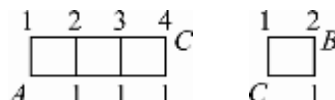
【隨堂講義-綜合練習】

**解答** 6

**解析**



$A \rightarrow B : 14 \text{ (種)}$

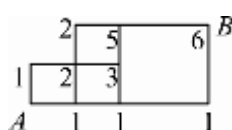


$A \rightarrow C \rightarrow B : 4 \times 2 = 8 \text{ (種)}$

所求 = (A 到 B 的捷徑走法) - (A 經過 C 到 B 的捷徑走法)

$$= 14 - 8 = 6 \text{ (種)}$$

[另解]



將連至 C 的道路刪去

則 A 到 B 不經 C 的走法有 6 種

8.將 5 件不同的物品任取 3 件，分給 3 個兒童，每人恰得 1 件，方法有 \_\_\_\_\_ 種。

【隨堂測驗】

解答 60

解析 即自 5 件相異物中任取 3 件的排列數

故有  $P_3^5 = 5 \times 4 \times 3 = 60$  種

9.5 個人任意搭乘四部計程車，方法有(1)\_\_\_\_\_種，若規定每部計程車至多只能搭載 4 個人，則方法有(2)\_\_\_\_\_種。

【龍騰自命題】

解答 (1)1024;(2)1020

解析 (1) $4^5 = 1024$  (種)

(2) $4^5 - 4 = 1020$  (種)

10.  $\frac{(1+2x)^5 - 1}{x}$  展開式中， $x^2$  項的係數為\_\_\_\_\_。

【龍騰自命題】

解答 80

解析 所求  $x^2$  項的係數，相當於  $(1+2x)^5$  中  $x^3$  項的係數

即  $C_3^5 \times 2^3 = 10 \times 8 = 80$

11.甲、乙、丙、丁、戊五個人排成一列，甲不可排首位且乙不可排末位的方法有\_\_\_\_\_種。

【隨堂講義-綜合練習】

解答 78

解析 所求 = (任意排列數) - (甲排首位的排列數) - (乙排末位的排列數)

+ (甲排首位同時乙排末位的排列數)

=  $5! - 4! - 4! + 3!$

= 78 (種)

12.將 3 種酒倒入五個不同的酒杯中，每個酒杯只能倒入 1 種酒，共有\_\_\_\_\_種倒法。

【龍騰自命題】

解答 243

13.將 5 個相同的蘋果，與 4 個相同的橘子，全部分給甲、乙 2 人，每人可兼得，則分法有\_\_\_\_\_種。

【龍騰自命題】

解答 30

解析  $H_5^2 \times H_4^2 = C_5^6 \times C_4^5 = C_1^6 \times C_1^5 = 30$  (種)

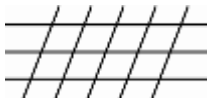
14.有三艘不同的渡船，每艘最多可載 5 人，今有 6 人同時要過渡，安全過渡的方法有\_\_\_\_\_種。

【龍騰自命題】

解答 726

解析 安全過渡的方法 = (任意坐法) - (6 人坐同一艘船的坐法) =  $3^6 - 3 = 726$  種

15.如圖所示，共有\_\_\_\_\_個平行四邊形。



【龍騰自命題】

解答 30

解析  $C_3^3 \times C_2^5 = 3 \times 10 = 30$  個

16.渡船有 3 艘，每艘最多可載 5 人，今有 7 人同時要過渡，安全過渡的方法有\_\_\_\_\_種。

渡的方法有\_\_\_\_\_種。

【龍騰自命題】

解答 2142

解析 安全過渡 = 任意坐 - (7 人同船) - (6 人同船, 1 人落單)

=  $3^7 - 3 - [(C_6^7 \times C_1^3) \times (C_1^6 \times C_1^2)] = 2187 - 3 - 42 = 2142$  種

17.由 1、2、3、4 四個數字中 (數字可重複被取出)，其可構成的三位數有\_\_\_\_\_個。

【隨堂測驗】

解答  $4^3$  (或 64)

解析 因為有百位、十位、個位三個位置，

所以考慮每個位置的排法

每個位置均可由 1、2、3、4 四個數字任選其一排入

方法各有 4 種

故三位數共有  $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$  個

18.由 0、1、2、3 四個數字中 (數字可重複被取出)，其可構成的三位數有\_\_\_\_\_個。

【隨堂測驗】

解答 48

解析 因為有百位、十位、個位三個位置，所以考慮每個位置的排法

百位可由 1、2、3 選其一排入的方法有 3 種

另外十位、個位每個位置均可由 0、1、2、3 四個數字

任選其一排入

方法各有 4 種，故三位數共有  $3 \times 4 \times 4 = 48$  個

19.有 5 種不同的果汁，倒入 3 個相同的杯子中，每個杯子只能倒進一種果汁，則倒法有\_\_\_\_\_種。

【隨堂講義-綜合練習】

解答 35

解析 設每一種果汁倒的杯數分別為

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$

則  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$

其非負整數解有  $C_3^{3+5-1} = C_3^7 = 35$  組

故倒法有 35 種

20.利用二項式定理，寫出  $(x-y)^4$  的展開式為\_\_\_\_\_。

【隨堂測驗】

解答  $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

解析

$(x-y)^4 = C_0^4 x^4 (-y)^0 + C_1^4 x^3 (-y)^1 + C_2^4 x^2 (-y)^2 + C_3^4 x^1 (-y)^3 + C_4^4 x^0 (-y)^4$   
=  $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

21.  $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^6$  展開式中，常數項為\_\_\_\_\_。

【隨堂講義-綜合練習】

解答 60

解析 一般項為

$$C_k^6 x^{6-k} \left(\frac{2}{x^2}\right)^k = C_k^6 \times x^{6-k} \times 2^k \times x^{-2k} = C_k^6 \times 2^k \times x^{6-3k}$$

$$\text{令 } 6-3k=0, \text{ 得 } k=2$$

$$\text{故常數項為 } C_2^6 \times 2^2 = 15 \times 4 = 60$$

22. 設  $n$  為自然數，若  $(a+b)^n$  依  $a$  的降冪展開式中，第 3 項的係數和第 5 項的係數比為 1:6，則  $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【隨堂講義-綜合練習】

**解答** 11

**解析** 依題意

$$C_2^n : C_4^n = 1 : 6$$

$$\Rightarrow 6 \times C_2^n = C_4^n$$

$$\Rightarrow 6 \times \frac{n \times (n-1)}{2 \times 1} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$\Rightarrow 72 = (n-2) \times (n-3)$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n - 66 = 0$$

$$\Rightarrow (n-11)(n+6) = 0$$

$$\Rightarrow n = 11 \text{ 或 } -6$$

$$\because n \text{ 為自然數}$$

$$\therefore n = 11$$

### 三、計算題 (20 小題)

1. 試求 20 的正因數個數有幾個？

【隨堂測驗】

**解答** 6 個

**解析** 將 20 因式分解得  $20 = 2^2 \times 5^1$

所以 20 的正因數必可表示成  $2^x \times 5^y$

其中  $x=0, 1, 2$  且  $y=0, 1$

即 2 的指數有 3 種取法，5 的指數有 2 種取法

由乘法原理得 20 的正因數有  $3 \times 2 = 6$  個

2. 試求方程式  $x+y+z+u=10$  的

(1) 非負整數解有多少組？

(2) 正整數解有多少組？

【課本練習題-例題】

**解答** (1)286 組;(2)84 組

**解析** (1) 由重複組合數的結論

可得其非負整數解的組數有

$$H_{10}^4 = C_{10}^{10+4-1} = C_{10}^{13} = C_3^{13} = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} = 286 \text{ (組)}。$$

(2) 因為  $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1, u \geq 1$ ,

所以令  $x' = x - 1 \geq 0, y' = y - 1 \geq 0, z' = z - 1 \geq 0, u' =$

$u - 1 \geq 0$ ,

則  $x+y+z+u=10$  的正整數解組數相當於

$$(x'+1) + (y'+1) + (z'+1) + (u'+1) = 10,$$

即  $x'+y'+z'+u'=6$  的非負整數解組數，

$$\text{故其組數為 } H_6^4 = C_6^{6+4-1} = C_6^9 = C_3^9 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

(組)。

3. 將「32111」五個數字作直線排列，若三個「1」字兩兩不相鄰，則其排法各有多少種？

【隨堂測驗】

**解答** 2 種

**解析** (1) 將「3、2」先排，方法有  $2! = 2$  種，

且形成 3 個空隙

(2) 在「3、2」間所形成的 3 個空隙中，

排入三個「1」，方法有  $\frac{P_3^3}{3!} = 1$  種

由(1)(2)，利用乘法原理得方法共有  $2 \times 1 = 2$  種

4. 某次棒球比賽，規定每支球隊必須和其他所有球隊各比賽一場，若賽程總計有 78 場，試問參賽隊伍共有多少支？

【課本練習題-例題】

**解答** 13

**解析** 設參賽隊伍共有  $n$  支，其中  $n$  為正整數。

因為每兩支隊伍均須比賽一場，所以賽程共有  $C_2^n$  場，

$$\text{即 } C_2^n = 78, \text{ 得 } \frac{n(n-1)}{2} = 78,$$

上式可化為  $n^2 - n - 156 = 0$ ，分解得  $(n-13)(n+12) = 0$ ，

即  $n = 13$  或  $n = -12$ ，但  $n$  為正整數，故  $n = 13$ 。

5. 試求下列各式中的自然數  $n$  之值：

$$(1) C_8^n = C_{12}^n \quad (2) 15 \times C_3^n = 2 \times P_3^{n+1}$$

【課本練習題-隨堂練習】

**解答** (1)  $n = 20$ ; (2)  $n = 14$

**解析** (1) 由  $C_8^n = C_{12}^n$ ，得  $C_{n-8}^n = C_{12}^n$ ，即  $n - 8 = 12$ ，故  $n = 20$ 。

(2) 原式化為

$$15 \times \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 2 \times (n+1) \times n \times (n-1), \quad n \geq 3,$$

化簡上式得  $5n - 10 = 4n + 4$ ，故  $n = 14$ 。

6.由相異的6本書中，至少取一本來閱讀，試問其方法有幾種？

【課本練習題-習題】

**解答** 63種

**解析** 每一本均可分「取」與「不取」兩種，故至少取一本的方法有  $2^6 - 1 = 63$  (種)。

7.若  $P_5^{n+2} = 120 \times C_4^{n+2}$ ，試求自然數  $n$  之值。

【課本練習題-習題】

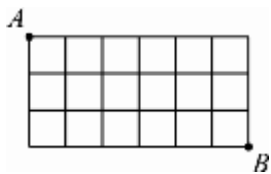
**解答**  $n = 7$

**解析** 原式化為  $(n+2) \times (n+1) \times n \times (n-1) \times (n-2)$

$$= 120 \times \frac{(n+2) \times (n+1) \times n \times (n-1)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}, n \geq 3,$$

整理得  $n-2=5$ ，即  $n=7$ 。

8.設由  $A$  到  $B$  的街道，如下圖所示，有直街7條、橫街4條，試問由  $A$  取捷徑到  $B$  的方法共有幾種？



【課本練習題-隨堂練習】

**解答** 84種

**解析** 每一個由  $A$  到  $B$  的捷徑都是由6個「右」及3個「下」排列而成，

$$\text{故走法有 } \frac{(6+3)!}{6!3!} = 84 \text{ (種)}。$$

9.因乾旱水源不足，自來水公司計畫在下週一至週日的7天中選擇2天停止供水，試問自來水公司有多少種選擇方式？

【課本練習題-習題】

**解答** 21種

**解析** 即自7天中任選2天的組合數為  $C_2^7 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$  (種)。

10.不定方程式  $x+y+z+u=12$ ，試求下列情形各有幾組解？ (1)

正奇數解 (2)  $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3, u \geq 4$  的整數解。

【龍騰自命題】

**解答** (1)35組;(2)10組

**解析** (1)設  $x=2k+1, y=2m+1, z=2n+1, u=2l+1$

原式  $= k+m+n+l=4, k, m, n, l$  為非負整數，

$$H_4^4 = C_4^7 = 35 \text{ (組)}$$

(2)令  $x=t+1, y=s+2, z=v+3, u=w+4$

原式  $= t+s+v+w=2, t, s, v, w$  為非負整數，

$$H_2^4 = C_2^5 = 10 \text{ (組)}$$

11.試求  $[2x+(3y-z)^2]^6$  展開式中， $x^3y^2z^4$  項的係數。

【龍騰自命題】

**解答** 21600

**解析**  $[2x+(3y-z)^2]^6$  展開後的一般項為

$$C_k^6 \times (2x)^k \times [(3y-z)^2]^{6-k}$$

其中  $x^3y^2z^4$  為  $k=3$  時展開所得

又  $(3y-z)^6$  的一般項為  $C_r^6 \times (3y)^r \times (-z)^{6-r}$

當  $r=2$  時可得  $y^2z^4$  項

故  $x^3y^2z^4$  項係數為  $C_3^6 \times 2^3 \times C_2^6 \times 3^2 \times (-1)^4 = 21600$

12.假設在招呼站有三輛計程車，每輛至多可搭乘4位客人，現招呼站來了5位要搭乘計程車的旅客，試問共有幾種不同的載客方式？

【課本練習題-習題】

**解答** 240種

**解析** 5人任意搭乘三輛計程車的方法有  $3^5 = 243$  種，

5人搭同一輛車的方法有3種，故所求方法數共有  $243 - 3 = 240$  種。

13.試求360的正因數中，可被30整除的個數。

【隨堂講義-進階題-學生練習】

**解答** 6個

**解析**  $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

360的正因數必為  $2^x \times 3^y \times 5^z$  的形式

正因數中，若可被30整除，即為30的倍數，又

$30 = 2 \times 3 \times 5$ ，因此，

$x$  可為1、2、3，三種情形

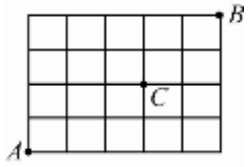
$y$  可為1、2，二種情形

$z$  可為 1，一種情形

由乘法原理得，有  $3 \times 2 \times 1 = 6$  個

14. 如下圖所示：

(1) 由  $A$  至  $B$  取捷徑，其走法有幾種？ (2) 又由  $A$  經  $C$  至  $B$  的走法有幾種？



【龍騰自命題】

**解答** (1) 126 種; (2) 60 種

**解析** (1)  $\frac{9!}{5!4!} = 126$  (種)

(2)  $A \rightarrow C \rightarrow B$

$$\frac{5!}{3!2!} \times \frac{4!}{2!2!} = 10 \times 6 = 60 \text{ (種)}$$

15. (1) 求  $(x + \frac{1}{x})^{10}$  的  $x^4$  項係數。 (2) 求  $(2x - \frac{1}{3x})^9$  的  $x^3$  項係數。

(3) 求  $(2x^2 + \frac{3}{x})^6$  的常數項。

【高手挑戰 (105 新命題)】

**解答** (1) 120; (2)  $-\frac{1792}{9}$ ; (3) 4860

**解析** (1)  $C_3^{10} x^7 \times (\frac{1}{x})^3 \Rightarrow C_3^{10} = 120$

$$(2) C_3^9 (2x)^6 \left(-\frac{1}{3x}\right)^3 \Rightarrow C_3^9 \times 2^6 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1792}{9}$$

$$(3) C_4^6 (2x^2)^2 \left(\frac{3}{x}\right)^4 \Rightarrow C_4^6 \times 4 \times 3^4 = 4860$$

16. 「papaya」一字的字母全取排列，任 2 個「a」均不相鄰的排法有幾種？

【龍騰自命題】

**解答** 12 種

**解析**  $p, p, y$  先排，其排列數為  $\frac{3!}{2!} = 3$

○  $\square$  ○  $\square$  ○  $\square$  ○

另 4 個間隔 ○，選 3 個排  $a$ ，方法有  $C_3^4 = 4$  (種)

$\therefore$  所求排法有  $3 \times 4 = 12$  (種)

17. 平面上相異 10 點，其中  $A, B, C, D$  四點共線，其餘無三點共線，試求：

(1) 可連成多少條直線？ (2) 可構成多少個三角形？

【龍騰自命題】

**解答** (1) 40 條; (2) 116 個

**解析** (1) 平面上，任意相異兩點可決定一條直線

$$\therefore \text{所求} = C_2^{10} - C_2^4 + 1 = 45 - 6 + 1 = 40 \text{ 條}$$

(2) 平面上，任意不共線的三點可決定一個三角形

$$\therefore \text{所求} = C_3^{10} - C_3^4 = 120 - 4 = 116 \text{ 個}$$

18. 從 4、5、6、7、8、9 六個數字中，任取 3 個相異數字，試問：

(1) 可排成幾個三位數？

(2) 其中偶數有多少個？

【隨堂講義-基本練習題-學生練習】

**解答** (1) 120 個; (2) 60 個

**解析** (1) 

百	十	個
---	---	---

$$6 \times 5 \times 4 = P_3^6 = 120 \text{ (個)}$$

$$(2) P_1^3 \times P_2^5 = 3 \times 5 \times 4 = 60 \text{ (個)}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 百、十的排法  
 $\downarrow$   
 個位數字為 4 或 6 或 8

19. 試求  $(2x + y)^5$  依  $x$  的降幕展開式中

(1) 第三項。 (2)  $x^2y^3$  項的係數。

【基礎練習 (仿課本例題)】

**解答** (1)  $80x^3y^2$ ; (2) 40

**解析** (1) 由二項式定理中第  $k+1$  項 (一般項) 的公式，可得第三項為

$$C_2^5 (2x)^3 y^2 = 80x^3y^2。$$

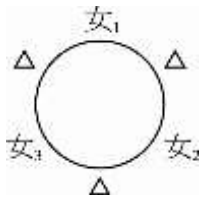
(2)  $x^2y^3$  項為  $C_3^5 (2x)^2 y^3 = 40x^2y^3$ ，得其係數為 40。

20.三男三女圍圓桌而坐，若男女相間隔，則坐法有多少種？

【隨堂講義-進階題-學生練習】

**解答** 12 種

**解析** 女生先入坐，方法有 $(3-1)! = 2! = 2$  種



男生安插空位，方法有 $P_3^3 = 3! = 6$  種

由乘法原理，共有 $2 \times 6 = 12$  種